

Science

TD

380

A1

C132

2,5

les cahiers de centreau



CENTREAU
Centre de recherches sur l'eau

DIFFUSION DES AFFLUENTS DANS LE FLEUVE SAINT-LAURENT

Jean-Louis VERRETTE
François AUBERT



UNIVERSITÉ LAVAL
Québec, Canada

Vol. II, No 5, septembre 1977

LES CAHIERS DE CENTREAU

LES CAHIERS DE CENTREAU constituent une collection d'études qui fait connaître les travaux des chercheurs de l'Université Laval dans le domaine de l'eau et qui s'adresse à la fois aux scientifiques et aux praticiens intéressés aux richesses naturelles et à leur conservation. Ils traitent chacun de sujets particuliers et apportent des conclusions ou des recommandations susceptibles non seulement d'augmenter les connaissances, mais de fournir aussi des solutions à de nombreux problèmes concernant la gestion et l'aménagement des ressources. Les études présentées ont été préalablement soumises à un comité d'appréciation, composé à la fois des analystes du comité de rédaction et de membres extérieurs au Centre de Recherches sur l'Eau.

Au moyen de cette revue scientifique bimestrielle, le CENTRE DE RECHERCHES SUR L'EAU de l'Université Laval désire mettre en évidence l'importance des sciences hydriques à cette institution et promouvoir des échanges à l'échelle nationale et internationale.

Ces cahiers sont adressés gratuitement sur demande. Les textes publiés sont sous la responsabilité de leurs auteurs et demeurent leur propriété. Leur reproduction est permise à condition d'en obtenir l'autorisation expresse du directeur de CENTREAU.

Dépôt légal — Bibliothèque nationale du Canada

Dépôt légal — Bibliothèque nationale du Québec

Pour tout renseignement, s'adresser à:
José Llamas, Ph.D., directeur

CENTREAU
Pavillon Pouliot
Université Laval,
Québec, P.Q.
Canada, G1K 7P4

COMITÉ DE RÉDACTION
Analyse: Guy Moreau, D. Sc.
Michel Cescas, Ph.D.
Documentation: Andrée Tardif, L.L.
Édition: G.-Oscar Villeneuve, Ph.D.

© 1977 CENTREAU, UNIVERSITÉ LAVAL

TD
380
A1
C132
215

DIFFUSION DES AFFLUENTS

DANS LE

FLEUVE SAINT-LAURENT

Jean-Louis VERRETTE
François AUBERT

ISSN 0702-7214



TABLE DES MATIÈRES

	Page
<u>INTRODUCTION</u>	1
1. <u>DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE PHYSIQUE</u>	3
2. <u>REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE</u>	7
2.1 <u>ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION</u>	7
2.2 <u>CONDITIONS AUX LIMITES</u>	9
3. <u>MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</u>	9
4. <u>APPLICATION AUX CALCULS HYDRODYNAMIQUES</u>	13
5. <u>APPLICATION À LA CONFLUENCE DU SAINT-MAURICE ET DU SAINT-LAURENT</u>	18
5.1 <u>SÉLECTION DU SITE</u>	18
5.2 <u>RÉSULTATS HYDRODYNAMIQUES</u>	22
5.3 <u>COMPARAISON DES RÉSULTATS</u>	26
5.3.1 <u>Débits cumulatifs adimensionnels</u>	29
5.3.2 <u>Vitesses</u>	31
5.3.3 <u>Ligne de séparation</u>	33
5.4 <u>CALCUL DE LA DIFFUSION</u>	34
5.4.1 <u>Conditions aux limites</u>	34
5.4.2 <u>Coefficients transversal et longitudinal</u>	35
5.4.3 <u>Comparaison des résultats</u>	36
6. <u>CONCLUSION</u>	40
<u>RÉFÉRENCES</u>	42

d'échantillons d'eau sur le terrain. Les campagnes de mesure sont cependant coûteuses et n'apportent pas toujours les résultats "globaux" escomptés parce qu'elles sont locales et qu'elles sont effectuées à des moments spécifiques au cours de l'année. L'interprétation des valeurs recueillies est quelquefois rendue difficile lorsque les mesures s'échelonnent sur de longues périodes au cours desquelles les conditions varient.

La photographie aérienne est également utilisée mais les résultats obtenus par cette méthode ne décrivent que les conditions au niveau de la surface. De plus, l'étude du mélange n'est rendue possible que dans la mesure où les caractéristiques enregistrées par la photographie diffèrent "visuellement" d'un cours d'eau à l'autre.

Les modèles (physiques) réduits traduisent assez mal les phénomènes de diffusion et se révèlent très coûteux et limités dans la représentation de sorte que l'on a de plus en plus recours à des modèles mathématiques. Ces derniers expriment sous forme d'équations le phénomène physique et, après l'insertion des données géométriques et des valeurs aux limites, fournissent une "représentation" du domaine naturel soumis à l'étude, "représentation" sur laquelle les équations sont résolues numériquement. La méthode de résolution qui a été retenue est celle des "éléments finis". Cette méthode, employée à l'origine pour des calculs de structures, est de plus en plus utilisée en hydraulique où elle a fait son apparition vers 1970. Son principal avantage est sa grande souplesse d'utilisation. En effet, les éléments de formes différentes (des triangles ou des quadrilatères) peuvent s'adapter à des

profils topographiques très variés; de plus, on peut tenir compte de petits éléments et obtenir ainsi une bonne précision dans les zones de grande variabilité.

L'ensemble des calculs a été effectué en utilisant le système APL de l'Université Laval. Ce système est interactif et permet une grande souplesse de travail notamment lors de la mise au point du modèle, de son utilisation ou de modification de paramètres.

1. DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE PHYSIQUE

Le moyen le plus sûr de mesurer le mélange de deux cours d'eau A et B est de prélever des échantillons d'eau et de déterminer quelle est, dans ces échantillons, la proportion de l'eau venant de A et venant de B. Pour connaître cette proportion, il faut que les deux eaux diffèrent, c'est-à-dire qu'il y ait un "paramètre" de concentration c_1 dans A et c_2 dans B avec $c_1 \neq c_2$. Si la concentration dans l'échantillon est c ($c_1 < c < c_2$), le rapport des provenances est établi par la formule:

$$\frac{\text{Vol}_1}{\text{Vol}_2} = \frac{c_2 - c}{c - c_1}$$

Les paramètres peuvent être, soit de nature artificielle (colorants, traceurs), ce qui est à rejeter dans le cas du fleuve Saint-Laurent vu l'importance des débits, soit des paramètres physico-chimiques

De plus, si les caractéristiques (concentration d'un solvant, quantité de mouvement, température, charge électrique, etc.) de ces deux eaux se retrouvent à des concentrations différentes, ces dernières se transmettent dans l'échange et l'on constate ainsi un transfert des concentrations du volume de forte teneur vers le volume de faible teneur, en rapport avec leur gradient. Les phénomènes physiques qui provoquent cet échange d'eau sont multiples et se manifestent à différentes échelles [4] [7]:

- i) À la plus petite échelle, on retrouve l'agitation moléculaire de l'eau telle que décrite par les lois de Fick sur la diffusion moléculaire [5].
- ii) La turbulence propre à l'écoulement, qui est due à la vitesse d'agitation, est responsable à une échelle beaucoup plus grande du transfert entre deux volumes d'eau: c'est la "diffusion turbulente".
- iii) Enfin, on observe des échanges à plus grande dimension dans les cours d'eau; ce sont:
 - les échanges provoqués par la contrainte tangentielle due à une distribution inégale de la vitesse verticale ou transversale;
 - les mouvements hélicoïdaux ou écoulements secondaires qui naissent dans les courbes;
 - la macroturbulence engendrée par des phénomènes de dimensions;

- les influences locales comme les obstacles et les variations bathymétriques;
- les courants de densité thermiques ou salins.

Il est clair que tous ces facteurs peuvent intervenir simultanément, mais leur importance relative est très difficile à évaluer. Ils concourent tous à produire le même effet, soit le transfert de matière, dans les cours d'eau, dont le résultat global est le plus souvent appelé dispersion.

L'ensemble de ce phénomène est représenté mathématiquement par des équations dans lesquelles figurent des coefficients appelés coefficients de diffusion ou coefficients de dispersion, lesquels caractérisent l'intensité de l'échange suivant des directions reliées à l'écoulement.

2. REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE

2.1 ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION

Les équations de la diffusion-dispersion sont élaborées à partir d'un élément de volume auquel on applique le principe de conservation de la masse (du produit transporté) [1].

Si l'on exprime le phénomène en fonction de valeurs moyennes dans le temps et si on en limite la description à deux dimensions (en utilisant des valeurs moyennes sur une verticale), l'équation de la diffusion-dispersion prend la forme suivante:

$$\underbrace{h \frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{variation de la concentration dans le temps}} + \underbrace{hu \frac{\partial c}{\partial x} + hw \frac{\partial c}{\partial z}}_{\text{transfert par convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (hE_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (hE_z \frac{\partial c}{\partial z})}_{\text{transfert par diffusion moléculaire et turbulente}}$$

où

h = profondeur de l'eau en un point

x, z = coordonnées du système d'axes (fig.2)

u, w = vitesses moyennes sur une verticale selon Ox
et Oz

c = concentration

 E_x, E_z = coefficients globaux de dispersion à 2 dimensions.

Les dimensions relatives du fleuve (une largeur moyenne d'au moins 1,500 m contre une profondeur moyenne de moins de 10 m) ainsi que les résultats de mesures effectuées sur place mettent en évidence une répartition verticale presque uniforme de la concentration de sorte que la simplification du modèle à deux dimensions se trouve pleinement justifiée. D'autre part, la résolution du modèle étant limitée à des conditions de concentration et d'écoulement permanents, le premier terme de l'équation précédente s'annule, ce qui simplifie en fin de compte l'expression à résoudre par la méthode des éléments finis. Dans cette dernière équation, la variable est c ; les termes x, z, u, w et h peuvent être déterminés par la connaissance des caractéristiques topographiques et hydrauliques, à l'emplacement de l'étude, alors que les coefficients E_x et E_z doivent être ajustés empiriquement, le modèle ayant pour but, entre autre, d'en préciser des valeurs qui soient

compatibles avec les résultats de mesure disponibles présentement. Lors de la résolution par le modèle, on a utilisé des coefficients "locaux" E_z (longitudinal) et E_t (transversal), c'est-à-dire, orientés selon le sens de l'écoulement proprement dit (plutôt que selon Ox et Oz).

2.2 CONDITIONS AUX LIMITES

Pour résoudre l'ensemble du problème, il faut définir les contraintes externes ou encore les conditions aux limites qui sont de deux sortes (fig.3):

- a) Des conditions sur la variable: nous imposons les concentrations $c(x, z)$ sur S_1 qui représente l'ensemble des deux sections d'entrée;
- b) Des conditions sur le flux de concentration: nous imposons une valeur nulle au flux de concentration sur S_2 .

3. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La méthode numérique la plus fréquemment utilisée pour résoudre ce type d'équation est celle des différences finies. Mais dans cette méthode, la présence de contours irréguliers amène des difficultés de représentation. Les points de calcul doivent être équidistants dans les deux dimensions; en conséquence, une solution acceptable nécessiterait de nombreux points de calcul.

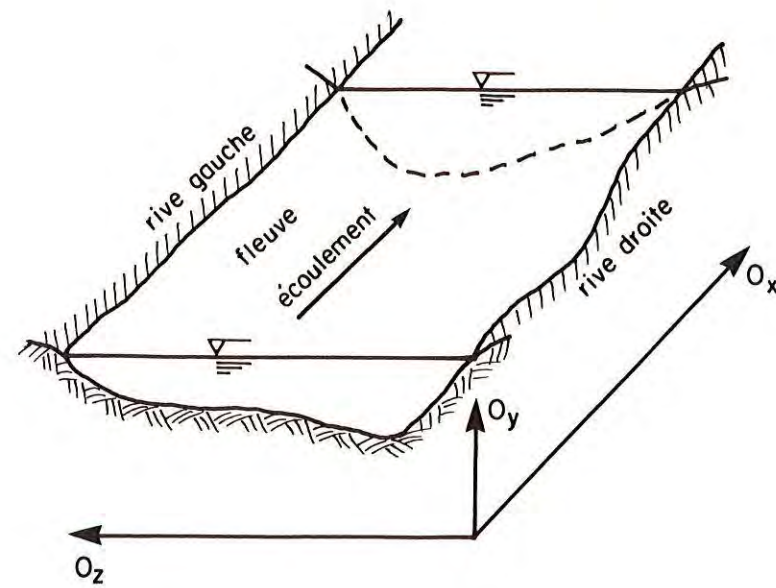


Fig. 2 — CROQUIS DE DÉFINITION DU SYSTÈME DE COORDONNÉES.

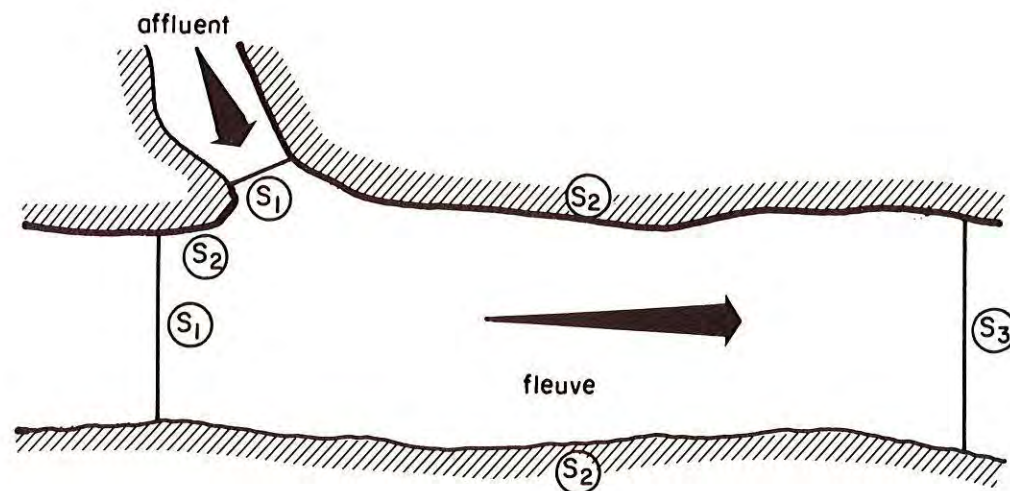


Fig. 3 — DIFFÉRENTS TYPES DE FRONTIÈRES SELON LES CONDITIONS AUX LIMITES CONSIDÉRÉES.

Avec la méthode des éléments finis, le domaine à l'étude est divisé en "éléments" (triangles dans le cas du modèle) qui sont inter-reliés en un nombre fini de points, appelés "noeuds" (fig.4). À l'intérieur de chaque élément, les variables sont considérées comme des fonctions linéaires (polynômes du premier degré) d'après les techniques de Ritz [9] [10]. Par la suite, on ne résout pas l'équation, mais une forme intégrale équivalente que l'on obtient en appliquant le principe des variations virtuelles.

L'équation différentielle est ainsi exprimée au niveau de chaque élément par une relation matricielle à trois inconnues qui sont les valeurs respectives de la variable aux trois noeuds.

L'ensemble des relations obtenues est rendu compatible au moment où l'on relie les éléments entre eux, ce qui correspond à l'opération d'assemblage qui fournit une matrice unique pour l'ensemble du domaine. On introduit ensuite les conditions aux limites en imposant des valeurs à certains noeuds.

La solution du problème est alors trouvée par résolution d'un système linéaire de la forme:

$$R X = B$$

où R est la matrice de l'ensemble du domaine, X la valeur cherchée pour chacun des noeuds, et B le vecteur des conditions aux limites.

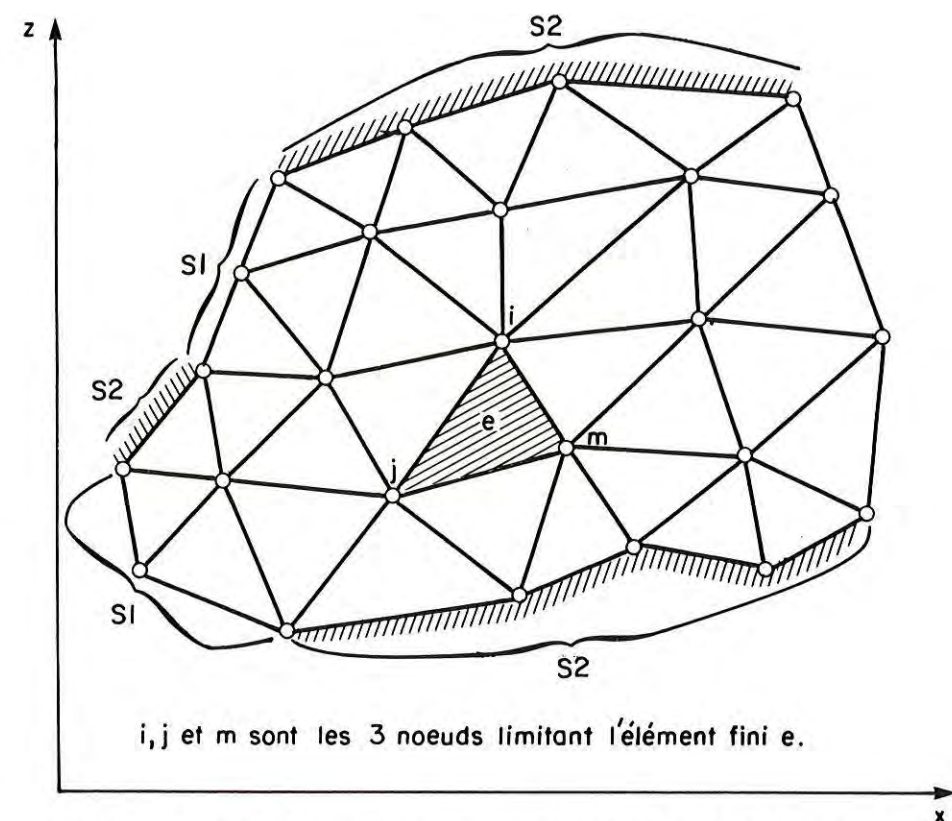


Fig. 4 — UNE RÉGION DU PLAN DIVISÉE EN ÉLÉMENTS FINIS.

Du fait de la disposition de la grille, la matrice R est une matrice diagonale bandée (fig.5) de sorte que les calculs de résolution sont beaucoup simplifiés. Nous avons adopté la méthode de Gauss pour résoudre le système, ce qui permet d'obtenir simultanément différentes solutions pour différents cas de conditions aux limites traités. En effet, à ce moment, le X et le B ne sont plus des vecteurs, mais des matrices ($NOD \times n$) où n est le nombre de cas traités et NOD , le nombre de noeuds.

4. APPLICATION AUX CALCULS HYDRODYNAMIQUES

La solution du problème de diffusion exige la connaissance du champ de vitesse en tout point. Le modèle défini précédemment peut être utilisé pour résoudre les équations de lignes équipotentielles ou de lignes de courant correspondant à un écoulement à potentiel [6]. On obtient ainsi, à chaque noeud de la grille, une valeur de la fonction de courant Q et, par dérivation au niveau de chaque élément, les composantes u et w de la vitesse. Ceci permet de palier au faible nombre de résultats de mesure (4 ou 5 relevés par section transversale alors qu'au moins 10 valeurs sont nécessaires aux noeuds).

On constate aisément que le modèle conçu pour le calcul de la diffusion permette de résoudre également le problème de la détermination de la vitesse.

En effet, l'équation de la fonction de courant Q est:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

Or, le modèle permet de résoudre les équations de la forme suivante:

$$hu \frac{\partial c}{\partial x} + hw \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (hE_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (hE_z \frac{\partial c}{\partial z}) \quad (2)$$

Ainsi, en posant

$$u = w = 0 \quad \text{en tout point}$$

$$E_x = E_z = 1 \quad \text{en tout point}$$

$$h = \frac{1}{h} \quad \text{en tout point}$$

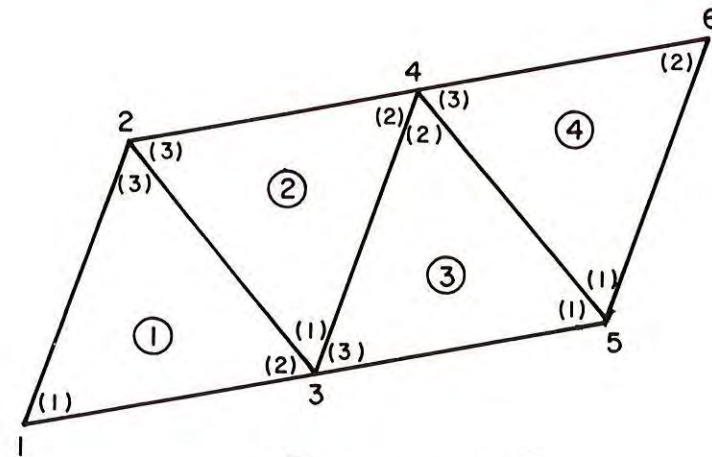
l'équation devient:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0$$

Aussi, l'équation (1) est un cas particulier de l'équation (2).

En conséquence, il est possible de résoudre des équations du type (1), mais il convient de modifier les conditions aux limites (fig. 3).

On a pour S_1 et S_2 des valeurs imposées de la fonction de



$$\begin{bmatrix} K_{11}^4 & K_{12}^4 & K_{13}^4 \\ K_{21}^4 & K_{22}^4 & K_{23}^4 \\ K_{31}^4 & K_{32}^4 & K_{33}^4 \end{bmatrix}$$

matrice unitaire
de l'élément quatre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & K_{11}^1 & \dots & K_{13}^1 & \dots & K_{12}^1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 2 & K_{31}^1 & K_{33}^1 + K_{33}^2 & K_{32}^2 + K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & 0 \\ 3 & K_{21}^1 & K_{23}^1 + K_{13}^2 & K_{22}^1 + K_{11}^2 + K_{33}^3 & K_{12}^2 + K_{32}^3 & K_{31}^3 & 0 \\ 4 & 0 & K_{23}^2 & K_{21}^2 + K_{23}^3 & K_{22}^2 + K_{22}^3 + K_{33}^4 & K_{21}^3 + K_{31}^4 & K_{32}^4 \\ 5 & 0 & 0 & K_{13}^3 & K_{12}^3 + K_{13}^4 & K_{11}^3 + K_{11}^4 & K_{12}^4 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & K_{23}^4 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix}$$

Fig.5 — MATRICE ASSEMBLÉE BANDÉE (6x6) CORRESPONDANT À LA GRILLE DE QUATRE ÉLÉMENTS ET DE SIX NOEUDS REPRÉSENTÉE CI-HAUT. LA "BANDE" EST DE LARGUEUR CINQ.

courant, mais pour S_3 il n'existe aucune condition.

La caractéristique essentielle d'un modèle d'écoulement à potentiel est qu'il ne tient pas compte du frottement et donne en principe une vitesse uniforme le long d'une section transversale.

Il est cependant possible de tenir compte de l'effet du frottement dans l'expression de la vitesse. Dans l'hypothèse d'une relation de type $v = f(h)$ où h représente la profondeur en un point et v , la vitesse moyenne sur une verticale, relation observée expérimentalement ou déduite des lois de Chezy ou Strickler [3], le modèle potentiel permet de reproduire cette relation lorsqu'on calcule l'écoulement pour un profil fictif de profondeur h' telle que:

$$h' = h f(h)$$

En effet, dans le cas d'un écoulement cylindrique rectiligne, l'équation donnant la fonction de courant est:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{h'} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0$$

qui, intégrée une fois, donne:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \gamma h'$$

où γ est une constante d'intégration.

En se rappelant que:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial z}$$

on obtient:

$$u = \gamma \frac{h'}{h} = \gamma f(h)$$

Dans des conditions aux limites adéquates, on trouve $\gamma = 1$, soit $u = f(h)$. La vitesse ainsi obtenue est bien fonction de la profondeur et tient donc compte du frottement, à la manière de la loi de Chezy [3].

En somme, après avoir déterminé en tout point la profondeur (à l'aide de cartes bathymétriques), on calcule une profondeur fictive $h' = h f(h)$ et on obtient les lignes de courant obéissant à la loi $v = f(h)$ pour en déduire les composantes de la vitesse par les formules suivantes:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

où Q est la fonction de courant, h la profondeur, u la composante de la vitesse suivant O_x et w la composante de la vitesse suivant O_z .

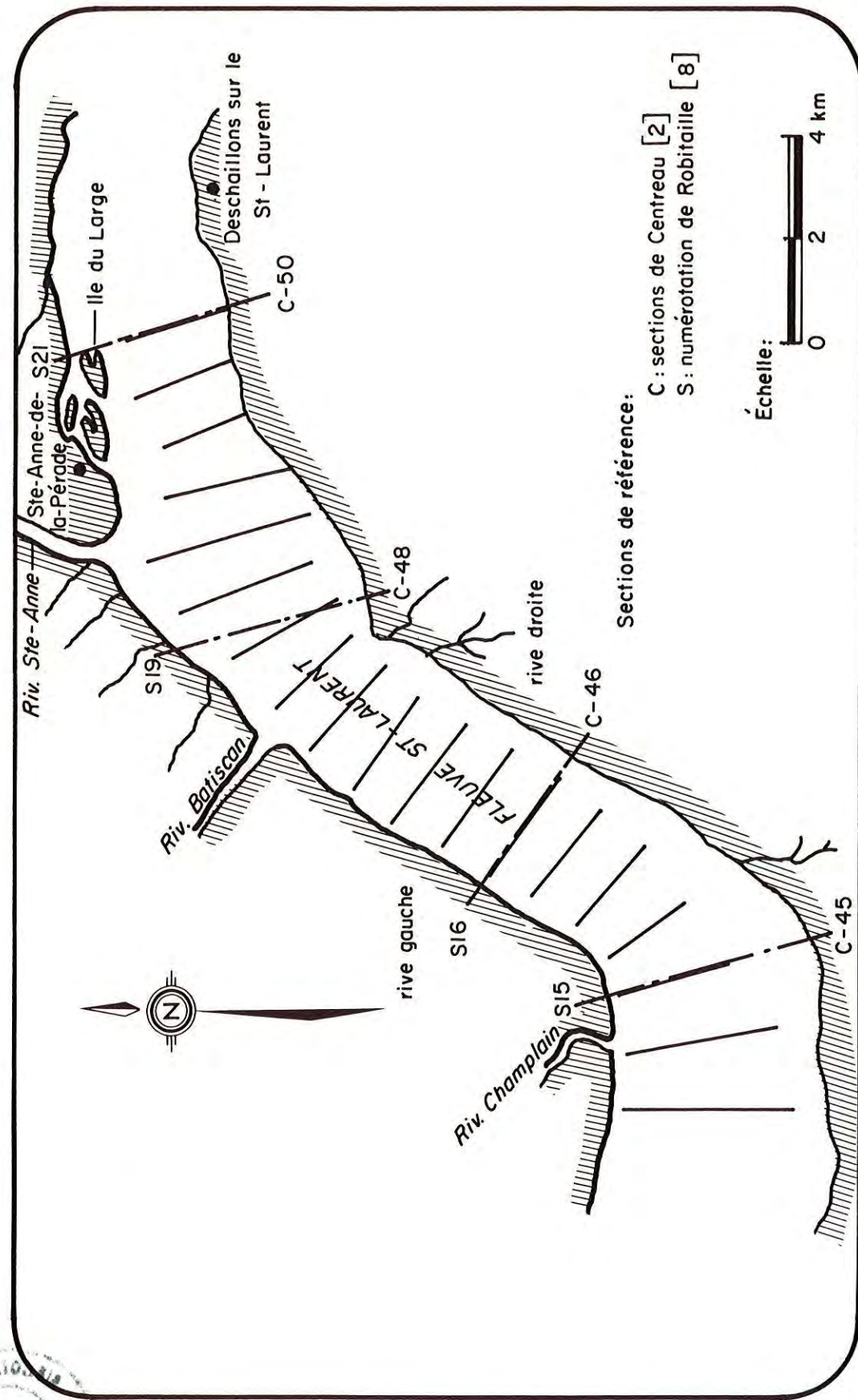


Fig. 6 b — SECTIONS TRANSVERSALES DE COMPARAISON (CENTREAU) ET SECTIONS ÉTABLIES POUR LA CONSTRUCTION DE LA GRILLE IO (GIO).

c) Certaines informations ont finalement été tirées de photographies aériennes, prises par le ministère des Terres et Forêts du Québec en août 1966, sur lesquelles on peut nettement identifier les eaux du fleuve et celles du Saint-Maurice.

Le rassemblement et l'analyse de toutes ces mesures ont été faits par Robitaille en 1975 [8].

La présente étude consiste à évaluer le degré du mélange à l'aide du modèle mathématique décrit plus haut et à comparer les résultats avec ceux des mesures in situ.

Très tôt, on a noté que la concentration montre une variation transversale très brusque dans la zone du mélange immédiatement à l'aval de la confluence; cette variation du mélange peut aller de zéro à cent pour cent sur une distance de quelques mètres. Construire une grille avec des éléments de cette taille aurait nécessité un très grand nombre d'éléments (de 1 500 à 2 000 éléments environ), ce qui aurait pu entraîner de sérieuses difficultés de manipulation sur ordinateur. On a donc préféré procéder par étapes:

i) d'abord, couvrir par une grille (G10) la totalité du tronçon du Saint-Laurent envisagé par l'étude; cette grille sert à déterminer les conditions hydrauliques de même qu'une série de lignes de courant (voir partie 4).

- ii) choisir ensuite, a priori, les lignes de courant entre lesquelles on suppose que s'effectue la totalité du phénomène de mélange; il n'y a en fait qu'une seule ligne de courant à choisir, la limite gauche de la zone de mélange étant fixée par la position de la rive gauche (rive nord) du fleuve.
- iii) par la suite, à partir de la ligne ainsi déterminée, construire de nouvelles grilles plus fines (G2, G3, G4) ne couvrant qu'une partie de la largeur du fleuve (fig. 7). Les conditions hydrauliques de ces grilles sont évaluées de nouveau et s'il y a concordance avec les résultats de mesure, le calcul de la diffusion-dispersion peut enfin être effectué.

5.2 RÉSULTATS HYDRODYNAMIQUES

Comme il a été dit (voir partie 4), le calcul de la diffusion exige que soient connues en chacun des noeuds de la grille les composantes u et w de la vitesse de l'écoulement. On aurait pu utiliser les mesures prises sur le terrain, mais il aurait fallu interpoler sur de grandes distances en raison du faible nombre de points de mesure (4 ou 5 par section transversale) par rapport au nombre de noeuds de la grille (au moins 10 par section). Nous avons préféré utiliser le modèle pour résoudre le problème. Le modèle détermine les lignes de courant d'un écoulement à potentiel muni d'une loi de vitesse $v = f(h)$.

La grille utilisée, indiquée par G10 sur la figure 7, comprend 468 noeuds. On a adopté un nombre de 13 noeuds par section transversale.

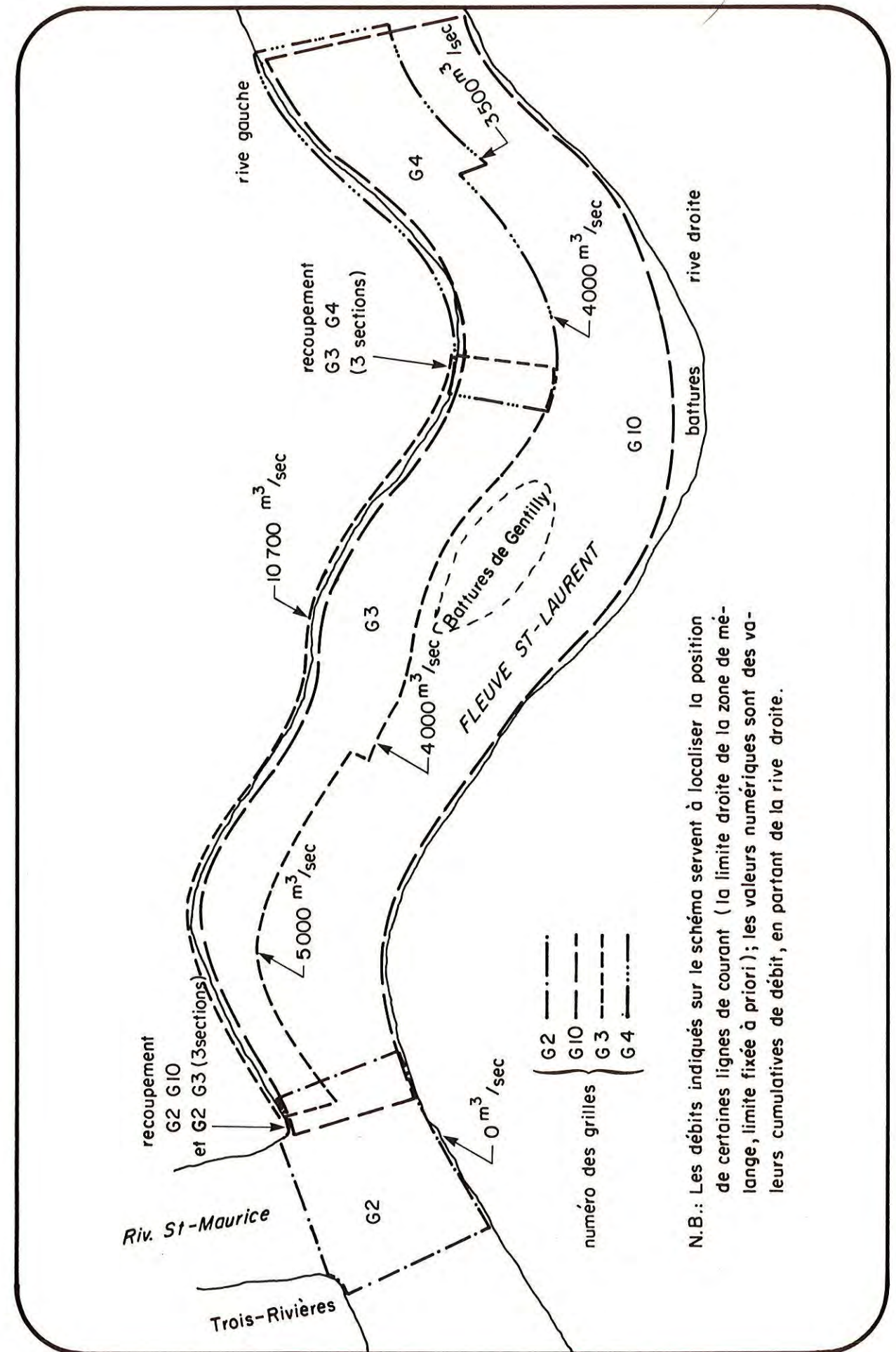


Fig. 7—SCHEMA D'ORGANISATION PAR DEUX GRILLES PRINCIPALES G2 ET G10 ET PAR TROIS GRILLES SECONDAIRES G2, G3 ET G4.

La distance d'une section à une autre a été déterminée afin de limiter à 10 le rapport maximum entre le plus grand et le plus petit côté de chacun des triangles. Ce chiffre n'est pas absolu, mais il présente une certaine sécurité dans le but d'éviter que les "matrices de rigidité" des triangles ne comportent des termes infiniment petits les uns par rapport aux autres. Pour cette grille, nous avons donc en moyenne des éléments de 120 mètres de largeur sur 1 200 mètres de longueur. Les éléments sont plus petits et plus nombreux dans la zone de confluence: en effet, la grille 2 (fig. 7) comporte 22 sections de 20 noeuds, l'écart minimum entre deux noeuds étant de 20 mètres. En étudiant l'ensemble des mesures prises sur les lieux, on a présumé d'abord que la loi de vitesse recherchée était du type:

$$v = \gamma h^{(\beta - \mu h)}$$

À la suite de quelques calculs où différentes valeurs des coefficients γ , μ et β avaient été mises à l'essai, il est apparu qu'aucune combinaison des valeurs de γ , μ et β ne donnait des résultats très satisfaisants pour toutes les sections de comparaison (S3, 7, 12, 15, 16) à la fois; on a constaté aussi que les résultats obtenus, au même endroit, pour différentes combinaisons des coefficients, différaient entre eux d'un ordre de grandeur qui restait inférieur à l'imprécision due à la bathymétrie. On a donc opté finalement pour une loi très simple du type:

$$v = \gamma f(h) = \gamma h^{2/3} \text{ avec } \gamma = 1$$

Ainsi, on attribue en tout point une profondeur fictive:

$$h' = h f(h) = h^{5/3}$$

Il est apparu cependant que la vitesse n'était pas aussi sensible aux variations de profondeur que la loi ne le supposait. Aussi, pour parer à cet inconvénient, la profondeur fictive (h') a été calculée à partir du lissage du profil bathymétrique de chaque section transversale, lissage opéré au moyen de polynômes du 4ième degré. Donc:

$$h' = (h^*)^{5/3} \text{ où } h^* = g(h), \text{ } g: \text{ fonction de lissage}$$

Les conditions aux limites introduites dans le modèle pour le calcul du régime hydraulique sont basées sur les résultats des campagnes de mesure. La valeur du débit représentant le plus fidèlement les conditions, lors de ces campagnes de mesure, a été établie à $10\,000 \text{ m}^3/\text{s}$ pour le fleuve Saint-Laurent. Les valeurs de débit de la rivière Saint-Maurice proviennent des données relevées à la centrale hydro-électrique de Grand-Mère. On a sélectionné des valeurs correspondant à trois conditions hydrauliques différentes:

- a) $2\,563 \text{ m}^3/\text{s}$ = moyenne des maxima (journaliers) annuels
- b) $707 \text{ m}^3/\text{s}$ = moyenne annuelle
- c) $283 \text{ m}^3/\text{s}$ = moyenne des minima (journaliers) annuels

Pour obtenir les valeurs de la vitesse, on procède par dérivation au niveau de chaque élément. À partir des trois valeurs (de la

fonction de courant) aux noeuds d'un élément et des trois profondeurs, on calcule la vitesse moyenne sur cet élément:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial z} \quad w = -\frac{1}{h} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

où Q = fonction de courant que l'on exprime en termes matriciels:

$$U_n = B_n^t \times Q_e \div (h_m)$$

où

$$Q_e = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

h_m = moyenne des profondeurs aux noeuds d'un élément

B_n = matrice de dérivation

U_n = matrice des composantes de la vitesse

5.3 COMPARAISON DES RÉSULTATS

On a fait la comparaison des débits cumulés, de la vitesse de l'écoulement et de la ligne de séparation entre les eaux du fleuve et celles du Saint-Maurice. Le débit utilisé pour ce dernier correspond à la valeur moyenne annuelle, soit $707 \text{ m}^3/\text{sec}$. Les valeurs de vitesse et les débits cumulatifs adimensionnels (D.C.A.) sont ceux obtenus le

long de sections transversales* durant la campagne de CENTREAU et calculés par Robitaille [10] (dans le cas des débits cumulatifs adimensionnels).

La ligne de séparation des eaux a été déterminée d'abord par PIETTE ET ASSOCIÉS à la suite d'observations visuelles et ensuite par Robitaille qui a analysé la variation brusque observée dans les mesures physico-chimiques des relevés de CENTREAU.

Dès que nous avons entamé ces comparaisons, il est apparu que l'un des principaux problèmes serait la différence rencontrée entre les données bathymétriques. En effet, les profils bathymétriques utilisés par CENTREAU ont été relevés par échosondeur sur le terrain, tandis que ceux qui ont été introduits dans les calculs proviennent de cartes marines du gouvernement fédéral. Or, l'écart entre les profils provenant de ces sources est si important qu'il a fallu éliminer certaines sections de comparaison. L'écart, en moyenne de deux mètres, peut atteindre cinq mètres (fig.8), les valeurs bathymétriques différant le plus, entre elles, près des rives.

* Nous avons retenu quatre sections numérotées S7, 12, 15 et 16 suivant les désignations de Robitaille [8]. Ces numéros correspondent respectivement aux sections C-42, -44, -45 et -46 dans les rapports de CENTREAU [2].

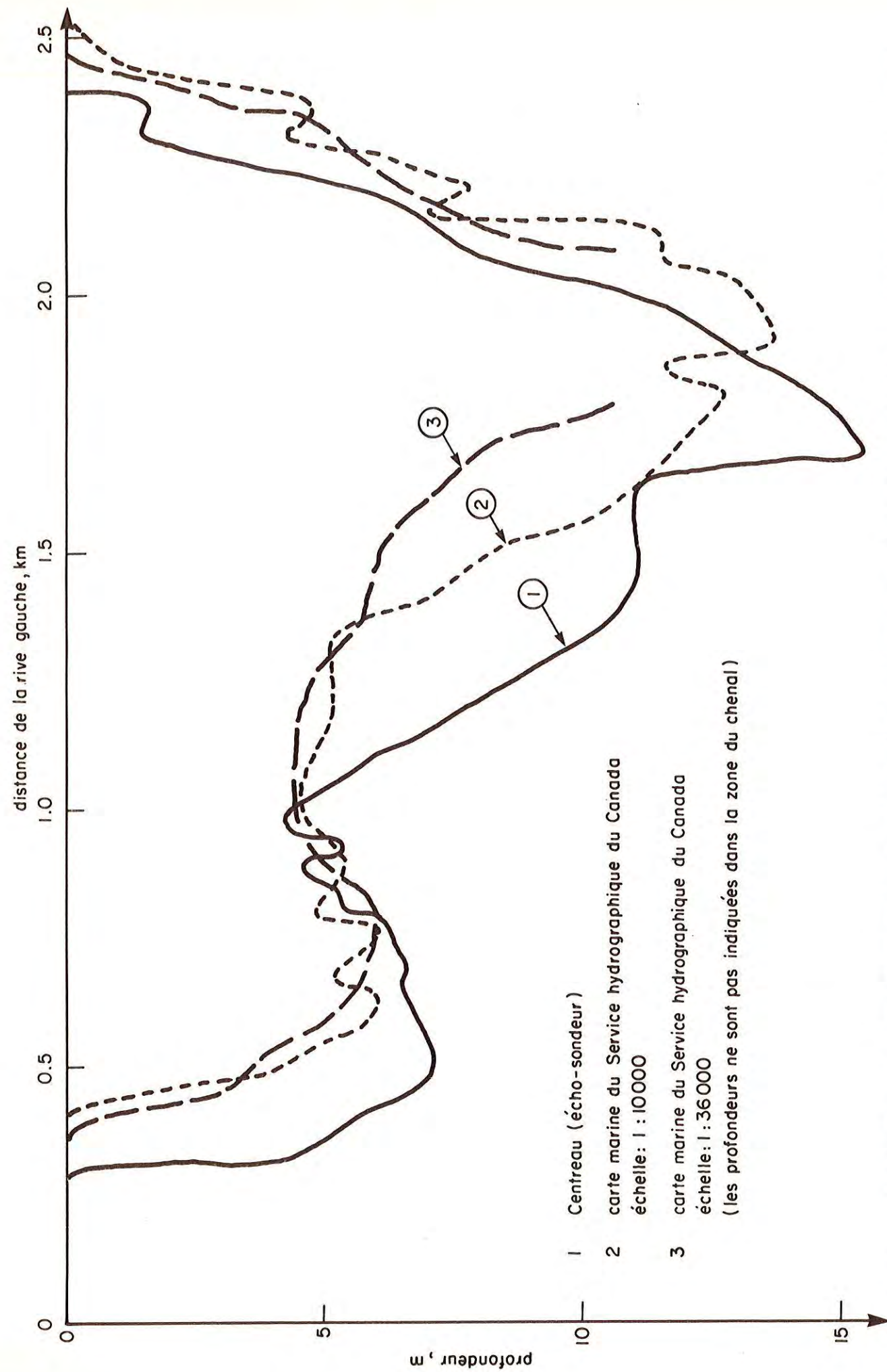


Fig. 8 — COMPARAISON DE DIFFÉRENTS PROFILS BATHYMÉTRIQUES AU LIEU D'UNE MÊME SECTION TRANSVERSALE (S19 OU C-48).

5.3.1 Débits cumulatifs adimensionnels (D.C.A.) (fig.9)

Le tableau ci-dessous résume les différences entre les résultats du modèle (obtenus par G10) et les mesures effectuées sur place (mesures de vitesse desquelles on obtient les débits par intégration).

SECTIONS	ÉCART MOYEN		ÉCART MAXIMUM	
	en un même point [m ³ /sec]	pour un même débit [m]	en un même point [m ³ /sec]	pour un même débit [m]
S7	80	30	210	~100
S12*	100	20	360	30
S15	230	40	730	~ 60
S16	170	30	670	80
Moyenne	150	30	490	70

* Les comparaisons sont faites pour le tronçon situé au nord des battures de Gentilly.

Ces différences peuvent paraître importantes en valeurs absolues, notamment au niveau de S15; en effet, 230 m³/sec représente 33 pour cent du débit de la rivière Saint-Maurice, mais en valeur relative, ce chiffre ne signifie que deux pour cent du débit total; par ailleurs, la précision, dans la localisation des lignes de courant, est de 30 mètres alors que la distance minimale entre deux noeuds a été limitée à 100 mètres lors de la construction de la grille G10.

5.3.2 Vitesses (fig. 10)

Les mesures sur le terrain sont comparées avec le profil transversal des vitesses obtenues sur chaque élément par dérivation.

SECTIONS	Écart moyen [m/sec]	Écart maximum [m/sec]	Vitesse maximum sur la section	
			Centreau [m/sec]	modèle (G10) [m/sec]
S7	0.17	0.53	0.74	0.89
S12*	0.39	0.76	1.23	1.46
S15	0.14	0.38	0.95	0.99
S16	0.08	0.23	0.94	1.02
Moyenne	0.20	0.48	0.97	1.09

* Les comparaisons sont faites pour le tronçon situé au nord des battures de Gentilly.

Les différences sont plus notables que dans le cas précédent, parce que les vitesses, à cause du type de relation choisie, sont directement reliées aux profondeurs. En conséquence, les écarts de vitesses sont de l'ordre des écarts des valeurs bathymétriques. Cependant, dans le calcul de la dispersion, les vitesses sont multipliées par les profondeurs pour exprimer les relations de continuité. L'erreur introduite est alors du même ordre que celle observée sur les lignes de courant.

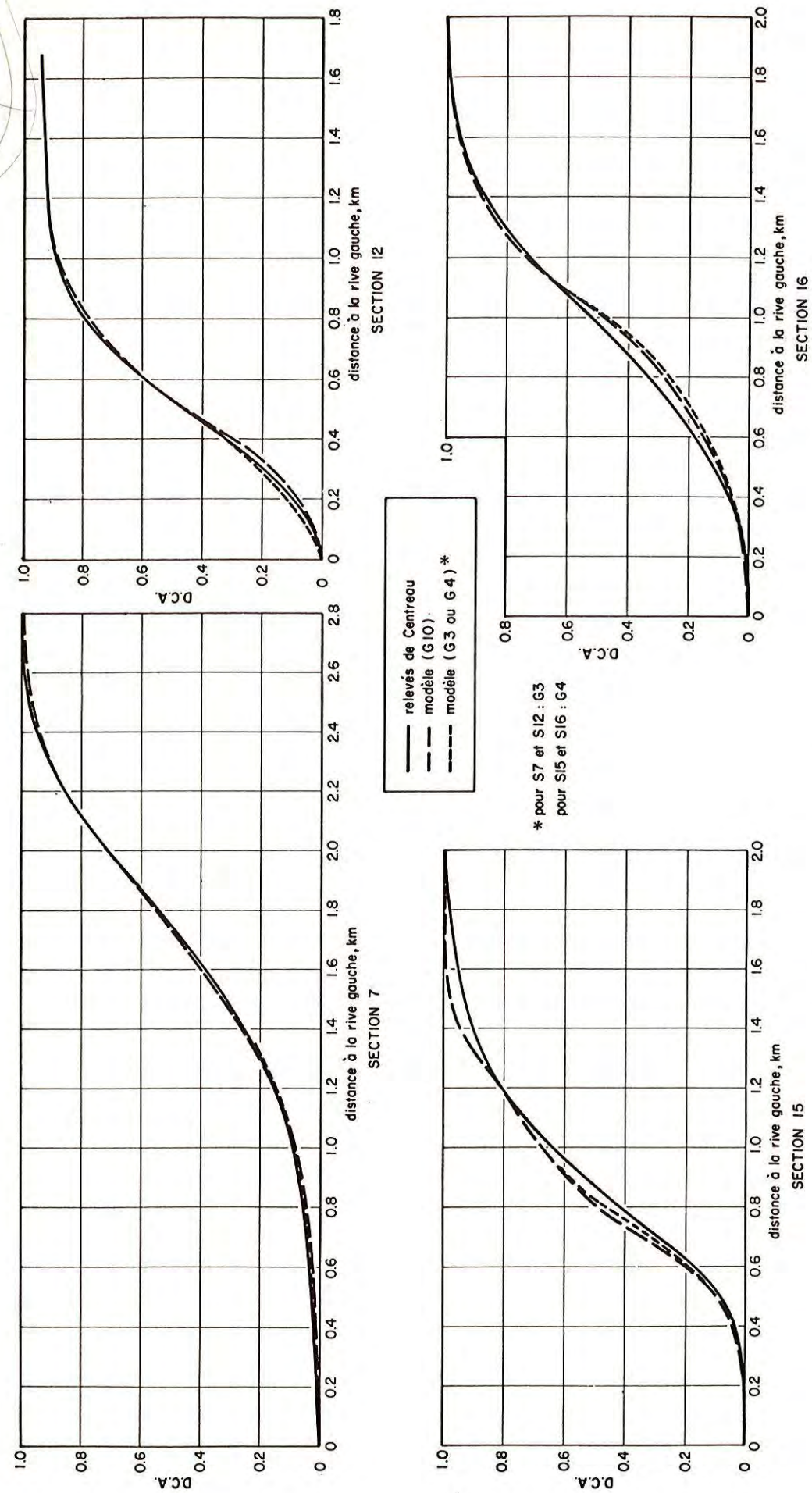


Fig. 9 — COMPARAISON DES DÉBITS CUMULATIFS ADIMENSIONNELS (D.C.A.).

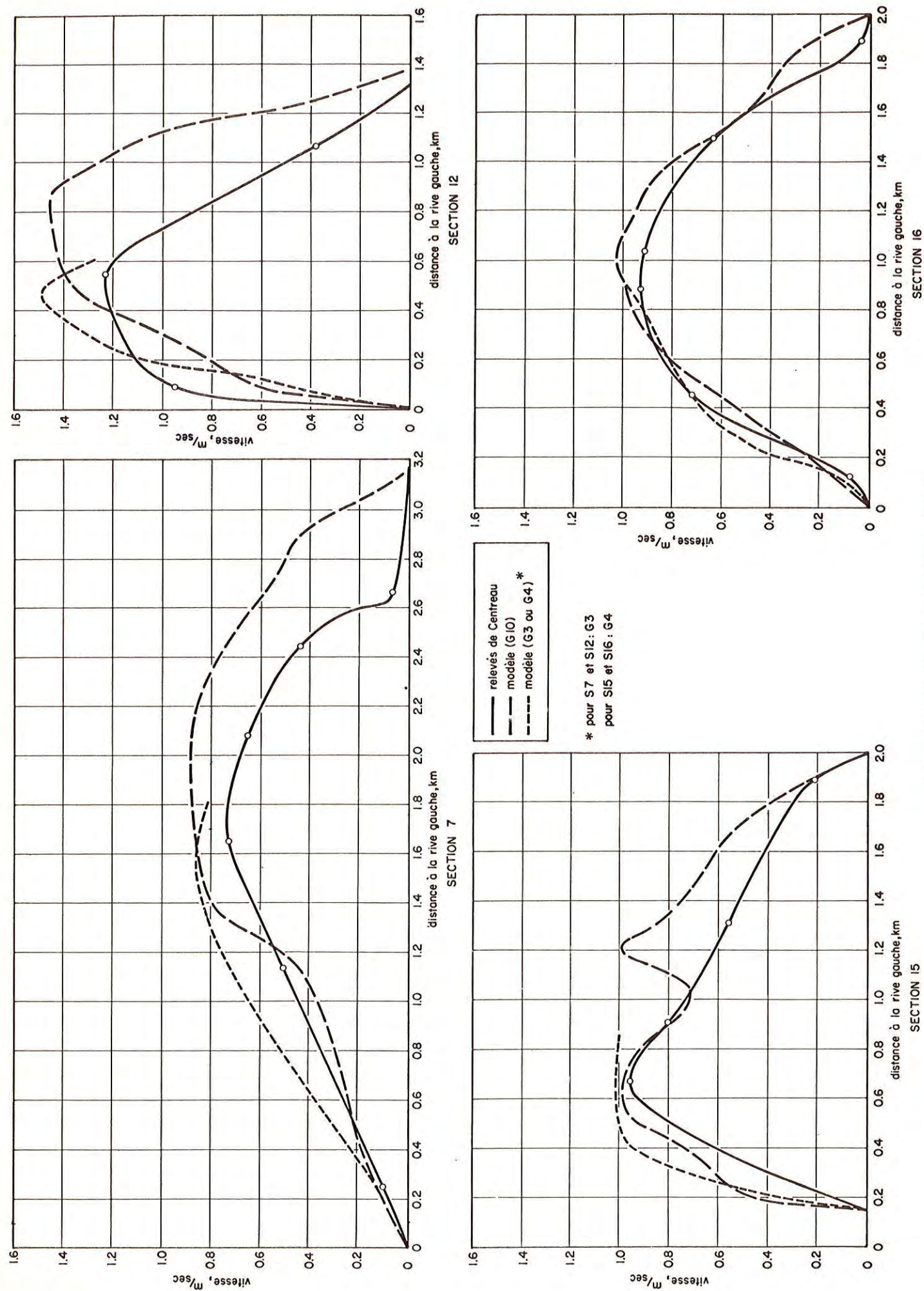


Fig. 10 — COMPARAISON DES PROFILS DE VITESSE

5.3.3 Ligne de séparation

Pour le modèle mathématique, on a simplement assimilé la position de la ligne de séparation à la position de la ligne de courant correspondant au débit du Saint-Maurice, lors du calcul des caractéristiques hydrodynamiques.

En comparant la ligne de séparation calculée avec celle qui a été déduite des mesures de CENTREAU, sur une longueur approximative de 30 kilomètres, on constate:

- un écart inférieur à 25 m sur 35 pour cent du parcours;
- un écart compris entre 25 et 50 m sur 32 pour cent du parcours;
- un écart compris entre 50 et 100 m sur 31 pour cent du parcours;
- un écart supérieur à 100 m sur 2 pour cent du parcours.

La largeur moyenne du Saint-Laurent sur ce parcours est de 2 500 mètres environ. Ainsi, la partie hydrodynamique du calcul fournit des résultats d'une bonne précision; en moyenne, on constate un écart de ± 25 mètres dans la localisation des lignes de démarcation mesurée et obtenue du modèle.

5.4 CALCUL DE LA DIFFUSION

On réalise le calcul de la diffusion à l'aide de trois grilles secondaires successives (G2, G3 et G4) qui se recourent. Ces grilles sont situées à l'intérieur de la grille principale (G10). La première (G2) s'étend de l'embouchure de l'affluent jusqu'aux environs de S7; elle comprend 440 noeuds et 798 éléments répartis sur 22 sections. La deuxième (G3) commence à S7 et se termine entre S12 et S15; elle comprend 280 noeuds et 486 éléments (28 sections). La dernière (G4), qui dépasse légèrement S16, comprend 260 noeuds et 450 éléments (26 sections) (fig. 7).

5.4.1 Conditions aux limites

Les limites latérales des grilles secondaires sont des lignes qui ont été déterminées à partir de calculs hydrodynamiques et qui se confondent avec des lignes de courant, la limite latérale gauche étant fixée par la rive gauche du fleuve. Les conditions initiales transversales pour la première grille sont celles de la concentration relevée sur le terrain et normalisée dans l'intervalle 0 pour le fleuve à 1 pour le Saint-Maurice. Pour assurer la continuité des calculs, lors du passage d'une grille partielle à une autre (de G2 à G3 et de G3 à G4), on a fait en sorte que les 3 dernières sections de chaque grille coïncident exactement avec les 3 premières sections de la grille suivante afin de conserver la valeur de la variable et de ses deux premières dérivées; ainsi, les valeurs initiales sont les valeurs qui résultent des calculs de la grille immédiatement en amont.

Les conditions aux limites latérales sont, sur la rive gauche, une condition de flux égal à 0 et sur sa frontière droite, qui est une ligne de courant, une condition de concentration nulle. En effet, cette ligne a été choisie afin que l'on puisse assurer que la diffusion ne s'est pas propagée jusqu'à elle; ainsi, au fur et à mesure que l'on va vers l'aval, cette frontière est repoussée vers le côté droit du fleuve. La ligne a été choisie pour couvrir amplement la diffusion relevée par les mesures.

Par exemple, au niveau de la dernière section, la grille couvre 65 pour cent du débit du fleuve, à partir de la rive gauche, alors que les mesures montrent que la diffusion du Saint-Maurice n'a pas encore dépassé 50 pour cent de ce débit.

5.4.2 Coefficients transversal et longitudinal

Etant donné la permanence de l'écoulement et de la concentration (hypothèse de calcul du modèle), le coefficient transversal de diffusion (E_t) est le plus important des deux. Nous lui avons attribué une valeur initiale de l'ordre de $1 \text{ m}^2/\text{s}$, valeur proposée par Robitaille [8]. Le coefficient longitudinal (E_l), de moindre intérêt, s'est avéré comme ayant peu d'influence même quand sa variation s'étend de 0 à $20 \text{ m}^2/\text{s}$; aussi, nous lui donnons systématiquement la valeur $E_l = 10 E_t$, valeur fréquemment mentionnée.

Après l'introduction des paramètres, les calculs ont été faits et

une valeur de concentration a été obtenue pour chaque noeud.

5.4.3 Comparaison des résultats

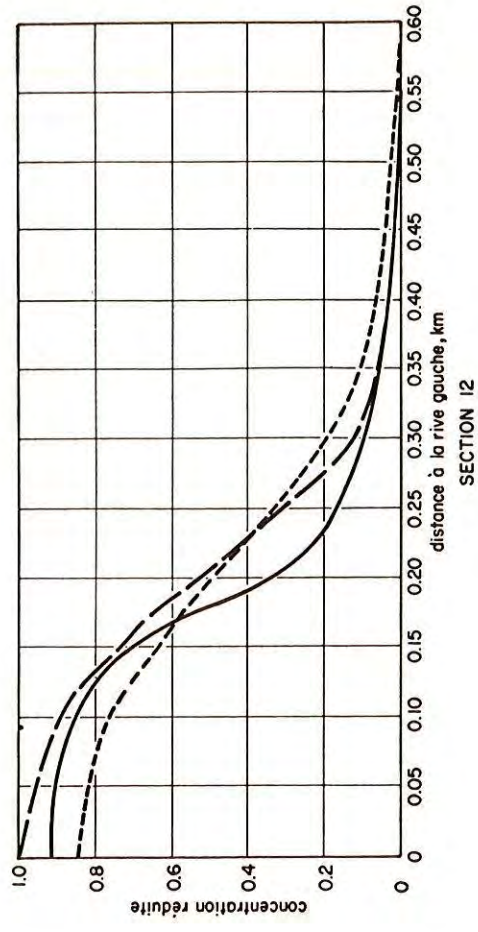
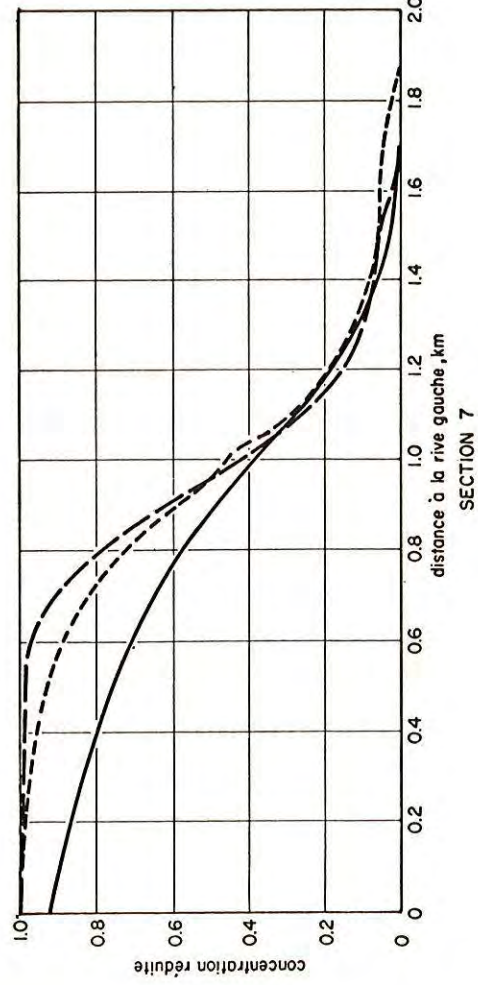
Nous avons procédé à deux sortes de comparaisons avec les résultats pris sur le terrain, sur les sections S7, S12, S15 et S16 comme précédemment:

- a) La comparaison de la concentration en fonction de la distance à la rive permet de mettre en regard les mesures directes prises par CENTREAU et les valeurs provenant du modèle (fig. 11).
- b) La comparaison de la concentration en fonction du débit cumulatif adimensionnel permet une représentation adimensionnelle du phénomène et un examen de son évolution (fig. 12).

L'ensemble des résultats apparaît dans les tableaux ci-dessous. Dans chaque section figurent deux valeurs, l'une correspondant à $E_t = .01 \text{ m}^2/\text{s}$ (ligne supérieure) et l'autre à $E_t = .2 \text{ m}^2/\text{s}$ (ligne inférieure).

SECTIONS	ÉCART MOYEN SUR LA LONGUEUR DE CALCUL		ÉCART MAXIMUM en un même point [concentration réduite]
	en un même point [concentration réduite]	pour une même concentration [m]	
S7	0.11	180	0.26
	0.09	160	0.18
S12	0.05	30	0.20
	0.08	40	0.18
S15	0.02	20	0.06
	0.06	50	0.13
S16	0.13	130	0.36
	0.11	100	0.29
Moyenne	0.08	90	0.22
	0.09	90	0.20

SECTIONS	ÉCART MOYEN SUR LA LONGUEUR DE CALCUL		ÉCART MAXIMUM pour un même débit [concentration réduite]
	pour un même débit [concentration réduite]	pour une même concentration [m^3/sec]	
S7	0.05	200	0.18
	0.05	180	0.13
S12	0.04	170	0.15
	0.07	320	0.15
S15	0.04	180	0.12
	0.05	260	0.11
S16	0.11	460	0.31
	0.08	350	0.18
Moyenne	0.06	250	0.19
	0.06	280	0.14



— relevés de Centreau
 - - - modèle: $E_1=0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$
 - · - · - modèle: $E_1=0.2 \text{ m}^2/\text{sec}$

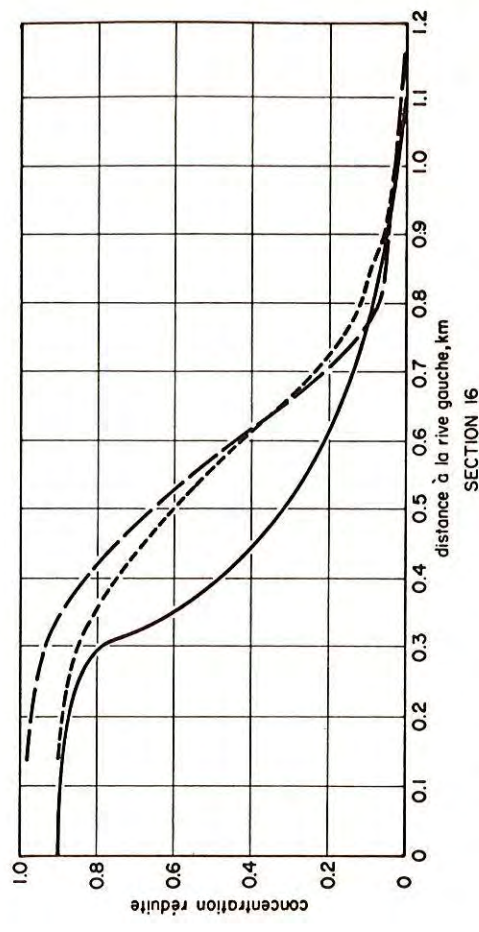
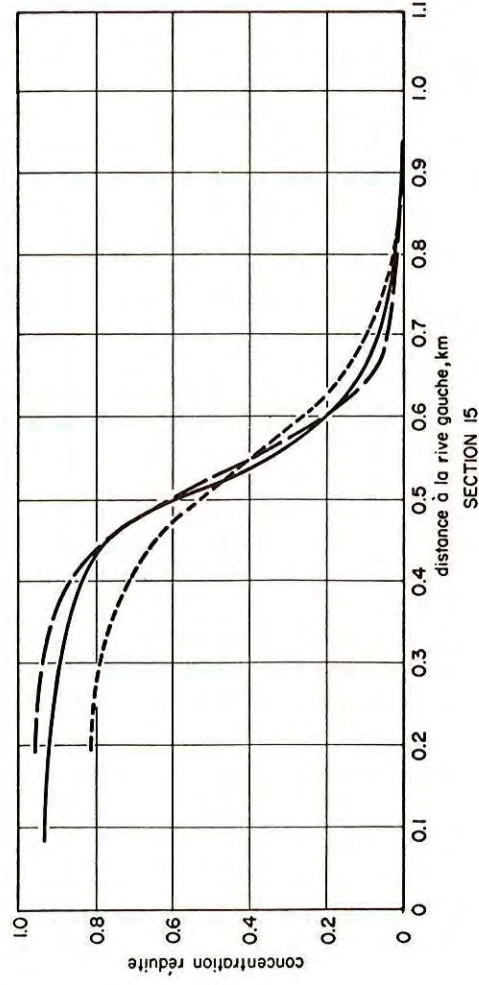
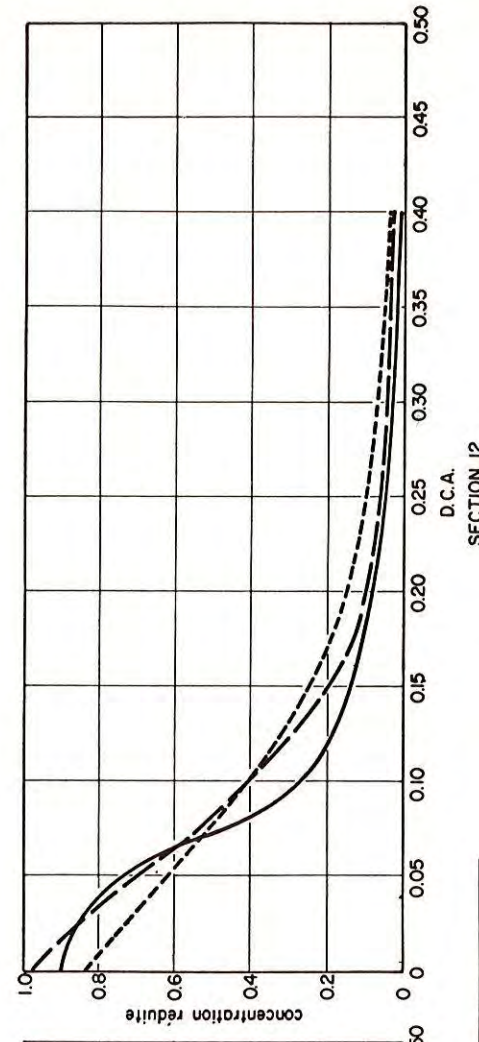
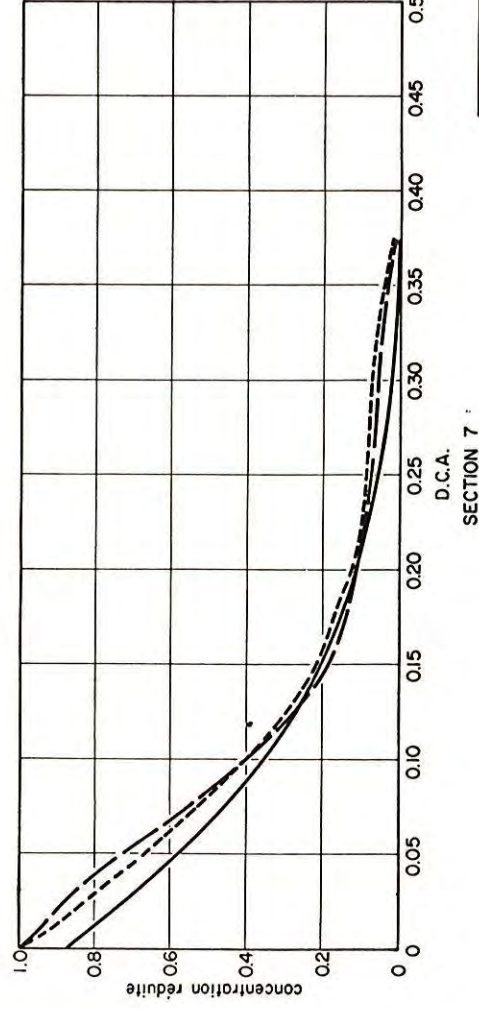


Fig. 11 — COMPARAISON DE LA CONCENTRATION RÉDUITE EN FONCTION DE LA DISTANCE À LA RIVE GAUCHE.



— relevés de Centreau*
 - - - modèle: $E_1=0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$
 - · - · - modèle: $E_1=0.2 \text{ m}^2/\text{sec}$

* Le D.C.A. utilisé représente une moyenne entre les valeurs de Centreau et du modèle.

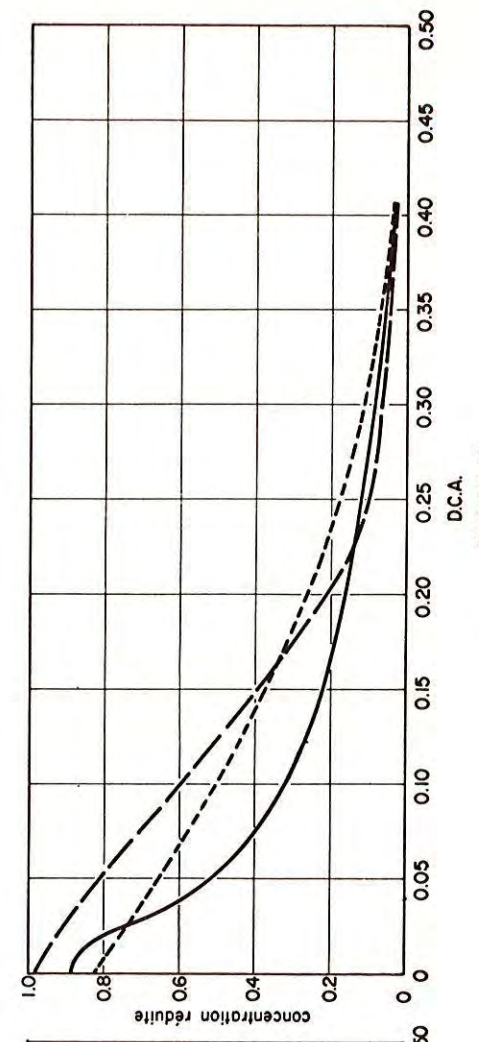
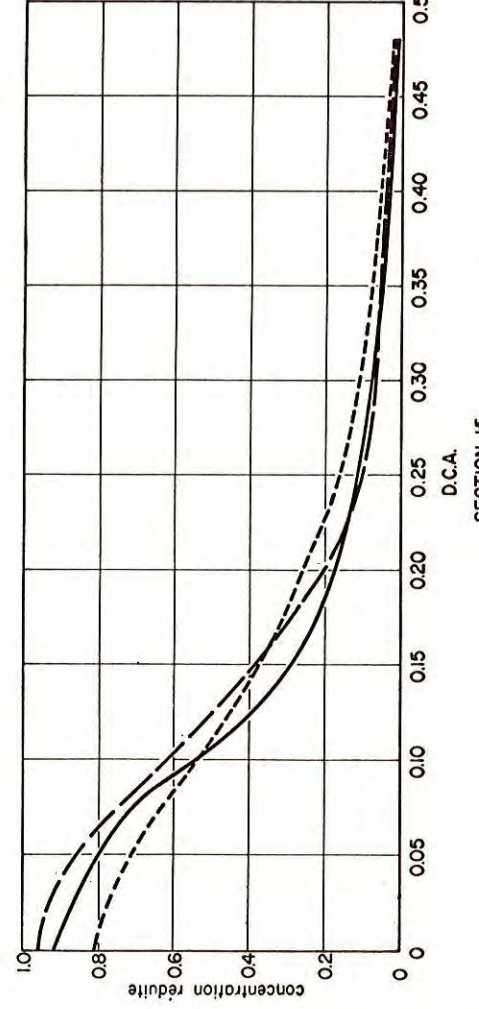


Fig. 12 — COMPARAISON DE LA CONCENTRATION RÉDUITE EN FONCTION DU DÉBIT CUMULATIF ADIMENSIONNEL (D.C.A.).

L'analyse de ces résultats amène deux conclusions:

- a) Il est très difficile de décrire la variation brusque de concentration que l'on note immédiatement à l'aval de l'intersection; ce fait est dû essentiellement à la taille des éléments qui, même dans les grilles plus fines, n'était pas inférieure à 80 mètres, alors que la variation brusque s'étend sur des longueurs de cet ordre. Seule une augmentation du nombre de noeuds par section donnerait de meilleurs résultats. Cependant, les valeurs obtenues présentent déjà une bonne précision.
- b) De plus, l'étude permet de définir une valeur maximale pour le coefficient de diffusion transversale. En effet, après avoir fait varier E_t , on a constaté que pour assurer un bon ajustement entre les résultats tirés du modèle et les mesures faites sur place, il est nécessaire que la valeur de E_t soit inférieure à $0.2 \text{ m}^2/\text{sec}$.

6. CONCLUSION

Après avoir présenté l'équation décrivant le phénomène de la diffusion-dispersion, nous avons montré comment la méthode des éléments finis en assure la résolution.

Une application a été faite au cas de la jonction du fleuve avec la rivière Saint-Maurice; dans ce cas, les conditions hydrodynamiques

ont été établies en utilisant le même modèle que celui pour la diffusion-dispersion. En tenant compte de la précision actuelle sur les données de base (notamment sur la profondeur), les résultats sont satisfaisants et laissent une représentation globale assez juste du phénomène étudié. Pour résoudre l'équation de la dispersion, on a montré qu'il est nécessaire d'utiliser des grilles très fines; la souplesse de la méthode des éléments finis s'est montrée ici très avantageuse.

Une des difficultés principales réside dans la disproportion entre les affluents et le fleuve; ainsi, le débit de la rivière Saint-Maurice représente environ cinq pour cent du débit du fleuve alors que l'incertitude au niveau des données de base (bathymétrie, vitesses, débits) est du même ordre de grandeur.

Avec des grilles plus fines, on pourrait augmenter la précision. Le modèle pourrait alors être utilisé pour simuler différentes combinaisons de débit et de concentration entre la rivière et le fleuve, pour définir des valeurs plus précises pour les coefficients de dispersion (E_t et E_l) ainsi que pour valider des lois régissant ces coefficients en fonction de la profondeur, du lieu et de la vitesse. En modifiant encore le modèle, on pourrait enfin évaluer le transport des sédiments et leur dépôt.

REFERENCES

- [1] BREBBIA, C.A. and R.A. ADDEY, 1974. *Finite Element Solution for Effluent Dispersion*. In "Numerical Methods in Fluid Dynamics", Pentech Press, London, p. 325-347.
- [2] CENTREAU, 1974. *Étude du fleuve Saint-Laurent - Tronçon Varennes-Montmagny, Aspects physiques et sédimentologiques*. Rapport général et annexes A et B, mars 1974.
- [3] CHOW, V.T., 1959. *Open Channel Hydraulics*, Chap.5, McGraw Hill Editors.
- [4] FISCHER, H.B., 1967. *The Mechanics of Dispersion in Natural Streams*. *Journal of Hydraulics Division, A.S.C.E.*, 93 (HY6), p. 187-215.
- [5] HOLLEY, E.R., 1969. *Unified View on Diffusion and Dispersion*. *Journal of the Hydraulics Division, A.S.C.E.*, 95 (HY2), p. 621-631.
- [6] LOZIUK, L.A., C. ANDERSON and T. BELYTSCHKO, 1972. *Hydrothermal Analysis by Finite Element Method*. *Journal of Hydraulics Division, A.S.C.E.*, 98 (HY11), p. 1983-1998.
- [7] MILLER, A.C. and E.B. RICHARDSON, 1974. *Diffusion and Dispersion in Open Channel Flow*. *Journal of Hydraulics Division, A.S.C.E.*, 100 (HY1), p. 159-171.
- [8] ROBITAILLE, S., 1975. *Diffusion du Saint-Maurice*. Thèse de maîtrise. Université Laval, Département de Génie civil, juillet 1975, sous la direction de Jean-Louis Verrette.
- [9] ZIENKIEWICZ, O.C., 1971. "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw Hill, London, p. 1-47.
- [10] ZIENKIEWICZ, O.C., R.H. GALLAGHER, J.I. ODEN and C. TAYLOR, 1975. "The Finite Elements in Fluids", vol.1: Viscous Flow and Hydrodynamics. John Wiley and Sons.