

Sciences

TD
380
A1
C132
2,1

les cahiers de centreau



CENTREAU
Centre de recherches sur l'eau

**ANALYSE STATISTIQUE DES LOIS
DU FLUAGE SECONDAIRE
DE LA GLACE DE RIVIÈRE
ET DE LAC**

Bernard MICHEL
Marc PARADIS



UNIVERSITÉ LAVAL
Québec, Canada

Vol. II, No 1, janvier 1977

L'étude présentée dans ce CAHIER a été subventionnée par le Conseil National de Recherches du Canada et porte le numéro GCS-76-02 du Laboratoire de Mécanique des Glaces au département de Génie Civil de l'Université Laval. Ce laboratoire contribue aux travaux de CENTREAU depuis sa fondation et constitue, de fait, une unité participante à ce Centre de Recherches.

MICHEL, Bernard: Professeur à la faculté des Sciences et de Génie de l'Université Laval depuis 1967, Bernard Michel a obtenu de cette université en 1954 un diplôme de Bachelier en Sciences Appliquées (Génie Civil) et de l'Université de Grenoble en 1962 un doctorat dans la même discipline. Depuis 1960, il s'est toujours occupé de la technologie des régions froides et plus particulièrement de la mécanique des glaces.

PARADIS, Marc: Diplômé en Génie Physique de la faculté des Sciences et de Génie de l'Université Laval en 1974, Marc Paradis poursuit actuellement à la même institution des études sur les propriétés mécaniques de la glace en vue de l'obtention d'une maîtrise en Sciences Appliquées.

RÉSUMÉ

Ce texte comporte une analyse statistique des résultats expérimentaux obtenus au Laboratoire de Mécanique des Glaces de l'Université Laval sur le fluage secondaire de la glace de rivière et de lac.

Pour représenter ces résultats, on a utilisé la fonction classique de fluage:

$$\dot{\epsilon} = A D_0 \exp[-Q/RT] \sigma^n$$

L'analyse des résultats en traction et compression a porté sur les quatre types principaux de glace d'eau douce: les glaces colonnaires à axe optique horizontal et vertical, la glace de frasil congelé et la glace de neige.

Les coefficients A , Q et n de la formule précédente ont été déterminés par des analyses de régression multiple pour chaque type de glace. Puis la meilleure valeur de n a été trouvée pour l'ensemble des résultats.

On peut aussi utiliser une loi universelle de fluage où seulement deux coefficients diffèrent pour chaque type de glace.

Finalement les corrélations multiples sont élevées pour ce qu'on peut appeler tous les types de glace polycristalline de rivière et de lac. Cela donne la représentation unique:

$$\dot{\epsilon} = 9.696 \times 10^4 \exp[-18430/RT] \sigma^{3.735}$$

qui est valide pour une large gamme des valeurs de $\dot{\epsilon}$ de 10^{-8} à 10^{-2} .

ABSTRACT

This article contains a statistical analysis of ex-

1961

ANALYSE STATISTIQUE DES LOIS
DU FLUAGE SECONDAIRE DE LA GLACE
DE RIVIÈRE ET DE LAC

INTRODUCTION

De nombreuses mesures en traction et en compression simple ont été effectuées [4] au Laboratoire de Mécanique des Glaces de l'Université Laval. Ces essais ont porté sur quatre types différents de glace de rivière et de lac [3]:

- la glace de neige T_1
- la glace monocristalline S_1
- la glace colonnaire S_2
- la glace de frasil S_4

Dans ce rapport, nous avons réalisé d'une façon systématique l'ajustement des résultats par des analyses de régression à partir de la fonction puissance dont la forme est la plus universellement utilisée pour représenter de tels résultats et qui fut originellement proposée par Glen [2] pour la glace.

Ce calcul permet des comparaisons intéressantes, d'une part sur le bien fondé d'une telle représentation et d'autre

part avec les résultats obtenus ailleurs par d'autres expérimentateurs.

I - POSITION DU PROBLÈME

Dans l'analyse de ses résultats expérimentaux, Ramseier [4] utilise la fonction semi-empirique suivante:

$$\dot{\epsilon} = A_s D_o e^{-\frac{Q_s}{RT}} (\sigma/E)^n \quad (1)$$

où:

- $\dot{\epsilon}$ - taux de déformation relative en sec^{-1}
- D_o - coefficient de diffusion pour le fluage dans la glace en $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$
- Q_s - énergie d'activation pour la diffusion interne prise égale à 14 300 calories mole^{-1}
- R - constante universelle des gaz égale à 1.9862 calorie $\text{mole}^{-1} \text{K}^{-1}$
- T - température absolue en degrés Kelvin (K)
- σ - contrainte de fluage secondaire kg/cm^2
- E - module de Young en kg/cm^2
- A_s - constante déterminée expérimentalement en cm^{-2}

L'équation (1) diffère de l'équation classique (2) pour

représenter le fluage secondaire de la glace ou des métaux à haute température par l'introduction du module de Young.

L'équation classique de Glen est de fait:

$$\dot{\epsilon} = A D_o e^{-\frac{Q}{RT}} (\sigma)^n \quad (2)$$

où:

- Q - énergie d'activation pour le fluage

Cette modification n'est pas sans entraîner certains problèmes. D'abord, il devient difficile de comparer les résultats avec ceux obtenus ailleurs par d'autres auteurs.

Mais surtout, le fait d'introduire arbitrairement le module de Young change la structure même de la relation par rapport à une des variables indépendantes, la température. Si le module de Young était une constante, cela ne modifierait absolument rien dans la structure de l'équation (1). Mais, à part la glace monocristalline, le module de Young des différents types de glace de rivière et de lac varie linéairement avec la température. Comme la représentation des résultats qui devrait être faite avec (2) est faite par l'intermédiaire de (1), on arrive alors au résultat suivant:

En isolant Q_s et Q dans (1) et (2) cela donne:

$$\ln \dot{\epsilon} = \ln A_s D_o - \frac{Q_s}{RT} + n \ln \sigma - n \ln E \quad (3)$$

$$\ln \dot{\epsilon} = \ln A D_0 - \frac{Q}{RT} + n \ln \sigma \quad (4)$$

ce qui donne en soustrayant :

$$Q = Q_s + \left[n \ln E(T) - n \ln \frac{A_s}{A} \right] RT \quad (5)$$

Il est donc clair que la constante d'activation devient par ce procédé artificiel une variable Q fonction de la température par l'intermédiaire de la dépendance du module de Young E par rapport à T .

Le résultat de cette opération est particulièrement évident en regardant une des représentations graphiques pour Q donnée par Ramseier et montrée en figure 1.

Pour justifier cette représentation Ramseier compare les résultats expérimentaux obtenus pour la glace de neige avec les deux formules :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D} = A_s (\sigma/E)^n \quad (6)$$

dans le premier cas et

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D} = A (\sigma)^n \quad (7)$$

dans le deuxième cas, avec $D = D_0 e^{-\frac{Q_s}{RT}}$.

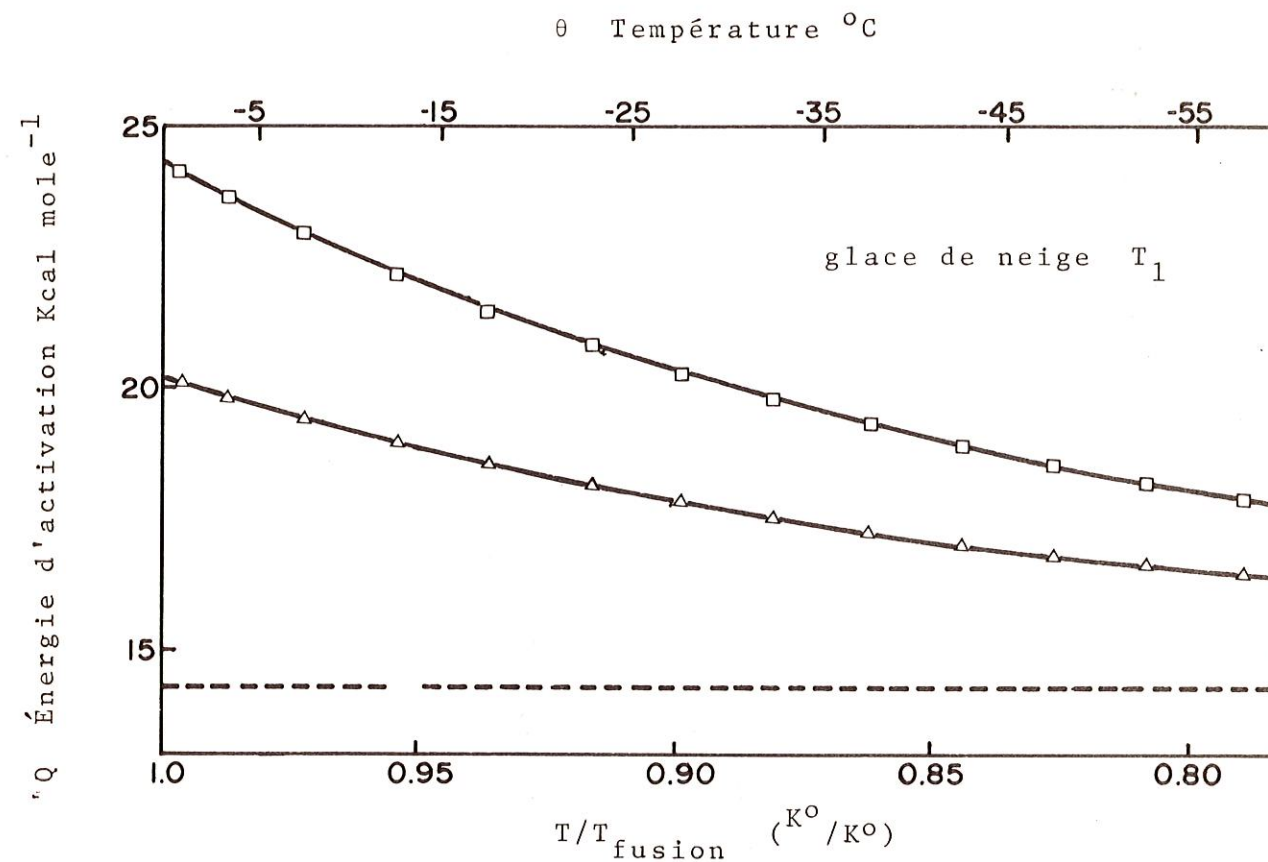


Fig. 1 - Énergie d'activation pour le fluage calculé par Ramseier, et fonction de la température. La partie supérieure correspond à des taux de fluage de $\dot{\epsilon}/D > 10^5$ et la partie inférieure à $\dot{\epsilon}/D < 10^5$. La valeur de Q_s pour la diffusion interne est prise égale à $14.3 \text{ K cal. mole}^{-1}$.

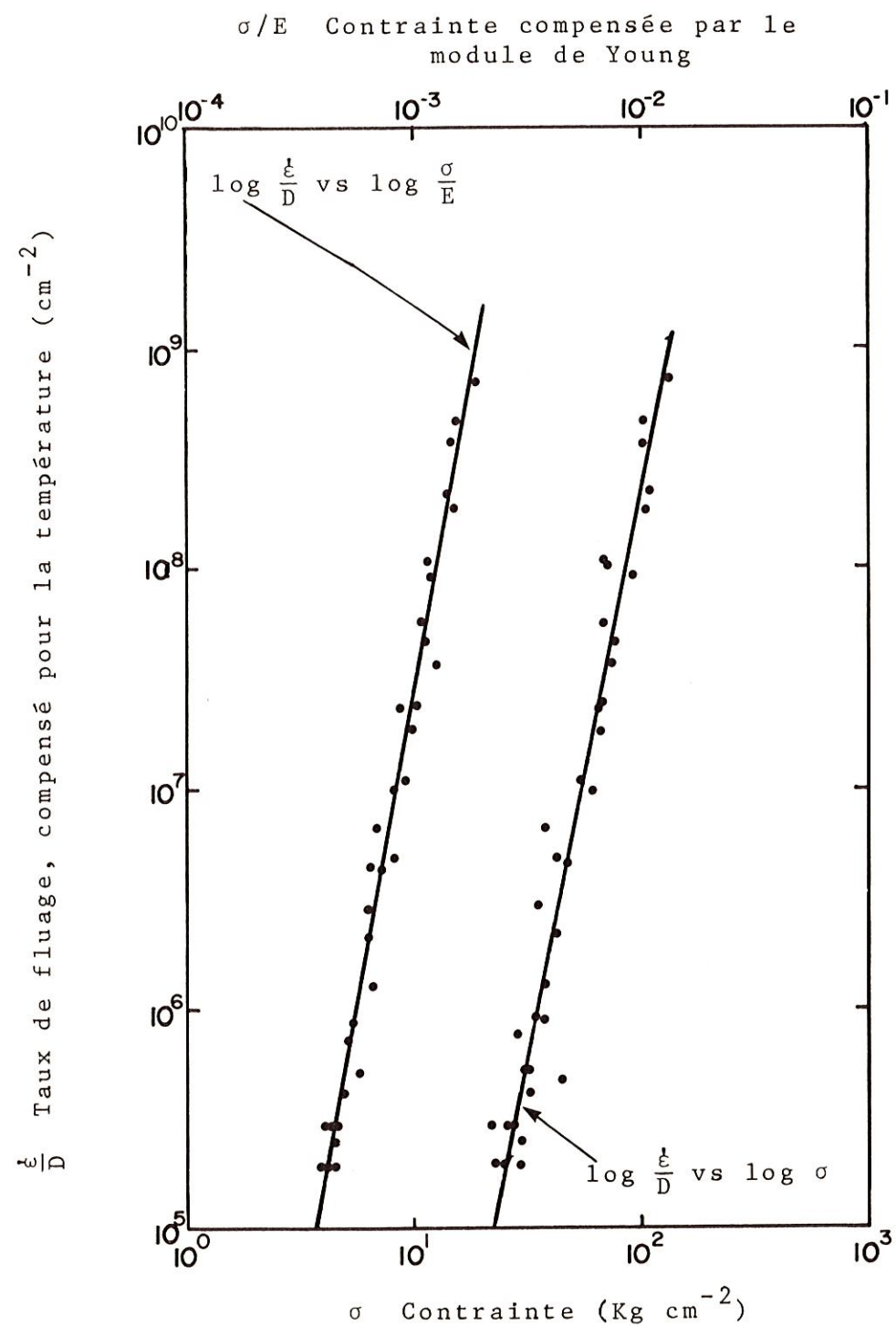


Fig. 2 - Comparaison par Ramseier des courbes où la fonction de fluage varie par rapport à σ/E ou σ .

Il laisse cependant dans ce dernier cas une valeur de l'énergie d'activation égale à $Q_s = 14\,300$ calories/mole alors qu'il aurait fallu prendre, si on utilise (2), la meilleure valeur ajustée de Q comme énergie d'activation pour la glace de neige. Le graphique de Ramseier donnant cette comparaison, est montré en figure 2. Aucune mesure quantitative n'est donnée par l'auteur pour comparer ces deux courbes. Nous verrons plus loin comment ces deux représentations se comparent réellement par une analyse de régression où la meilleure valeur de Q est obtenue.

II - MÉTHODES DE L'ANALYSE STATISTIQUE

Les techniques classiques de régression simple et multiple ont été utilisées pour représenter les résultats [1].

A) Analyse de régression de la fonction puissance

Une fonction que nous avons à analyser est celle de Ramseier:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D} = A_s \left(\frac{\sigma}{E}\right)^n$$

Cette fonction est facilement linéarisée en posant:

$$\begin{cases} y = \ln \dot{\epsilon}/D \\ x = \ln \sigma/E \end{cases} \quad (8)$$

tion multiple de toute la formule

$$r_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} \quad (13)$$

Il est aussi important de connaître la corrélation entre deux variables en maintenant l'autre constante.

La corrélation partielle entre $\ln \xi$ et $1/T$ pour $\ln \sigma$ constant est:

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)} \sqrt{(1 - r_{23}^2)}} \quad (14)$$

La corrélation partielle entre $\ln \xi$ et $\ln \sigma$ pour T constant est:

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)} \sqrt{(1 - r_{23}^2)}} \quad (15)$$

La corrélation partielle entre $\ln \sigma$ et $\frac{1}{T}$ pour $\ln \xi$ constant est:

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)} \sqrt{(1 - r_{13}^2)}} \quad (16)$$

On peut finalement vérifier que:

$$1 - r_{1.23}^2 = (1 - r_{12}^2) (1 - r_{13.2}^2)$$

C) Comparaison des résultats expérimentaux avec une fonction prédéterminée

Il faut comparer des valeurs expérimentales entre deux variables y et x par rapport à une relation prédéterminée $y = f(x)$.

L'écart-type résiduel est alors:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (y - f(x))^2}{n - 2}} \quad (17)$$

La corrélation est donnée par:

$$r = \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\delta y}\right)^2} \quad (18)$$

où l'écart-type pour les valeurs de y est:

$$\delta y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (19)$$

D) Coefficient de détermination

Généralement il vaut mieux évaluer la représentativité des fonctions pour représenter des valeurs expérimentales par le coefficient de détermination qui est le carré du coefficient de corrélation.

III - RÉSULTATSA) Valeurs expérimentales

Les résultats bruts des mesures du fluage secondaire pour les quatre types de glace considérés sont donnés en tableaux I, II, III et IV. Nous référons à l'auteur [4] pour la façon dont les mesures ont été effectuées.

Les variables σ , T et $\dot{\epsilon}$ ont été mesurées. De plus, les variables réduites utilisées par Ramseier ont été calculées, c'est-à-dire $\dot{\epsilon}/D$ et σ/E .

Pour obtenir D, Ramseier a utilisé une valeur de D_0 de $8 \text{ cm}^2/\text{sec}$ et pour Q_s , une énergie d'activation pour la diffusion interne de $14\,300 \text{ calories mole}^{-1}$.

Les valeurs de E en kg/cm^2 , utilisées par Ramseier sont les suivantes, où θ est en degrés Celsius.

$$\text{Glace de neige: } E = (524.23 - 6.73 \theta) 10^2 \quad (20)$$

$$\text{Glace colonnaire: } E = (580 - 6.6 \theta) 10^2 \quad (21)$$

$$\text{Glace monocristalline: } E = 9.1 \times 10^4 \quad (22)$$

B) Comparaison des deux modes de représentation

Nous cherchons donc à vérifier la comparaison de Ram-

TABLEAU I - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE DE NEIGE

σ	T	$\dot{\epsilon}$	σ	T	$\dot{\epsilon}$
6.47	-29.65	$1.5E^{-9}$	32.02	-21.28	$1.3E^{-6}$
8.25	-29.65	$2.6E^{-9}$	42.04	-34.65	$1.3E^{-6}$
6.47	-26.31	$2.9E^{-9}$	23.23	-10.47	$2.0E^{-6}$
12.45	-20.11	$4.0E^{-9}$	23.21	-10.47	$2.0E^{-6}$
10.21	-29.65	$4.4E^{-9}$	35.52	-19.92	$2.0E^{-6}$
8.25	-26.31	$4.9E^{-9}$	35.48	-19.92	$2.0E^{-6}$
6.47	-19.97	$5.3E^{-9}$	25.64	-9.75	$3.3E^{-6}$
10.21	-26.31	$7.9E^{-9}$	27.13	-9.75	$3.3E^{-6}$
6.47	-16.17	$9.3E^{-9}$	36.12	-19.67	$3.3E^{-6}$
8.25	-19.97	$1.1E^{-8}$	36.08	-19.67	$3.3E^{-6}$
12.21	-29.65	$1.2E^{-8}$	62.24	-34.90	$6.1E^{-6}$
10.21	-19.97	$1.7E^{-8}$	32.96	-9.19	$6.1E^{-6}$
8.25	-16.17	$1.9E^{-8}$	31.44	-9.41	$6.2E^{-6}$
12.21	-26.31	$1.9E^{-8}$	41.78	-21.94	$6.3E^{-6}$
10.21	-16.17	$3.0E^{-8}$	22.34	-2.60	$6.8E^{-6}$
6.47	-6.54	$3.6E^{-8}$	38.30	-9.35	$1.5E^{-5}$
8.23	-9.19	$3.8E^{-8}$	43.37	-20.74	$1.5E^{-5}$
12.20	-20.11	$3.8E^{-8}$	45.53	-21.29	$1.5E^{-5}$
12.21	-20.11	$3.9E^{-8}$	69.14	-34.50	$1.5E^{-5}$
12.45	-20.11	$4.4E^{-8}$	39.44	-9.41	$1.6E^{-5}$
12.21	-16.17	$7.9E^{-8}$	28.22	-2.62	$1.7E^{-5}$
10.16	-10.15	$9.1E^{-7}$	67.25	-21.56	$5.6E^{-5}$
10.43	-9.99	$1.1E^{-7}$	42.97	-9.01	$5.9E^{-5}$
10.65	-9.99	$1.8E^{-7}$	93.09	-34.39	$6.0E^{-5}$
11.13	-9.99	$1.8E^{-7}$	46.53	-8.93	$6.1E^{-5}$
11.97	-11.46	$1.8E^{-7}$	34.63	-2.64	$6.6E^{-5}$
17.66	-20.60	$1.8E^{-7}$	56.55	-9.11	$1.3E^{-4}$
19.08	-20.60	$1.8E^{-7}$	55.14	-9.22	$1.3E^{-4}$
12.42	-8.66	$1.9E^{-7}$	78.16	-22.27	$1.3E^{-4}$
10.21	-6.54	$2.0E^{-7}$	111.00	-34.79	$1.3E^{-4}$
16.89	-8.74	$6.4E^{-7}$	38.34	-2.55	$1.5E^{-4}$
15.60	-8.90	$6.5E^{-7}$	75.67	-9.14	$4.2E^{-4}$
14.85	-8.82	$6.7E^{-7}$	80.52	-9.25	$4.2E^{-4}$
15.74	-8.82	$6.7E^{-7}$	56.69	-2.57	$5.2E^{-4}$
29.08	-20.71	$6.7E^{-7}$	107.16	-22.41	$5.2E^{-4}$

TABLEAU I - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE DE NEIGE
(suite)

σ	T	$\dot{\epsilon}$	σ	T	$\dot{\epsilon}$
29.07	-20.71	$6.7E^{-7}$	142.63	-33.48	$5.2E^{-4}$
18.44	-10.45	$8.9E^{-7}$	71.66	-9.25	$1.2E^{-3}$
18.35	-10.45	$8.9E^{-7}$	113.65	-9.27	$1.2E^{-3}$
30.03	-20.19	$8.9E^{-7}$	70.76	-9.33	$1.2E^{-3}$
30.03	-20.19	$8.9E^{-7}$	61.86	-2.81	$1.2E^{-3}$
20.74	-8.71	$1.3E^{-6}$	100.71	-20.68	$1.2E^{-3}$
			107.76	-22.64	$1.2E^{-3}$

σ = contrainte en kilogrammes par centimètre carré
T = température en degrés Celsius
 $\dot{\epsilon}$ = taux de déformation en sec.⁻¹

Note: $\dot{\epsilon} = 1.5E^{-9} = 1.5 \times 10^{-9}$

TABLEAU II - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE DE FRASIL

σ	T	$\dot{\epsilon}$	σ	T	$\dot{\epsilon}$
2.18	-9.78	$1.12E^{-9}$	41.72	-10.47	$5.60E^{-5}$
4.40	-21.31	$2.24E^{-9}$	66.27	-20.36	$5.60E^{-5}$
3.09	-9.89	$2.91E^{-9}$	34.20	-9.11	$5.91E^{-5}$
3.09	-10.07	$3.16E^{-9}$	26.61	-2.34	$6.44E^{-5}$
4.40	-14.01	$4.73E^{-9}$	35.20	-2.60	$6.67E^{-5}$
3.84	-9.57	$6.02E^{-9}$	47.11	-2.62	$1.32E^{-4}$
6.37	-20.52	$6.51E^{-9}$	39.72	-2.86	$1.32E^{-4}$
3.61	-9.49	$7.15E^{-9}$	55.13	-10.42	$1.32E^{-4}$
4.40	-8.79	$1.10E^{-8}$	95.42	-20.38	$1.32E^{-4}$
4.40	-7.68	$1.32E^{-8}$	63.34	-21.26	$1.32E^{-4}$
6.37	-14.01	$1.56E^{-8}$	33.46	-2.60	$1.41E^{-4}$
6.04	-9.49	$2.11E^{-8}$	46.30	-9.11	$1.41E^{-4}$
4.40	-5.80	$2.16E^{-8}$	63.76	-10.37	$1.41E^{-4}$
5.58	-9.78	$2.32E^{-8}$	40.10	-2.60	$1.67E^{-4}$
4.40	-5.04	$2.57E^{-8}$	44.92	-4.07	$1.67E^{-4}$
6.04	-9.81	$2.86E^{-8}$	45.45	-5.17	$1.67E^{-4}$
8.33	-14.60	$3.85E^{-8}$	53.74	-7.63	$1.67E^{-4}$
8.88	-9.51	$6.14E^{-8}$	54.90	-9.65	$1.67E^{-4}$
10.30	-14.60	$6.63E^{-8}$	55.51	-10.58	$1.67E^{-4}$
9.98	-9.94	$1.15E^{-7}$	76.50	-18.17	$1.67E^{-4}$
10.36	-9.78	$1.22E^{-7}$	79.70	-19.00	$1.67E^{-4}$
10.39	-9.78	$1.27E^{-7}$	103.70	-27.03	$1.67E^{-4}$
9.98	-9.54	$1.35E^{-7}$	121.03	-34.36	$1.67E^{-4}$
11.74	-9.57	$1.85E^{-7}$	84.20	-10.39	$5.24E^{-4}$
12.13	-9.70	$3.04E^{-7}$	49.73	-2.65	$5.25E^{-4}$
15.87	-9.11	$6.56E^{-7}$	44.59	-2.68	$5.25E^{-4}$
12.61	-10.61	$1.28E^{-6}$	32.23	-2.70	$5.25E^{-4}$
12.39	-2.34	$1.34E^{-6}$	77.43	-9.14	$5.25E^{-4}$
34.74	-20.85	$1.78E^{-6}$	122.77	-20.41	$5.25E^{-4}$
33.70	-27.40	$1.78E^{-6}$	85.40	-22.41	$5.25E^{-4}$
23.49	-9.86	$1.85E^{-6}$	55.35	-2.60	$8.33E^{-4}$
24.30	-9.70	$2.00E^{-6}$	80.30	-9.94	$8.33E^{-4}$
34.50	-19.95	$2.00E^{-6}$	132.50	-27.20	$8.33E^{-3}$
33.80	-20.71	$2.00E^{-6}$	88.03	-9.14	$1.24E^{-3}$
43.20	-34.90	$2.00E^{-6}$	79.44	-10.40	$1.24E^{-3}$

TABLEAU II - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE DE FRASIL
(suite)

σ	T	$\dot{\epsilon}$	σ	T	$\dot{\epsilon}$
21.58	-2.65	$6.13E^{-6}$	94.02	-10.42	$1.24E^{-3}$
15.23	-9.17	$6.16E^{-6}$	84.75	-22.41	$1.24E^{-3}$
18.42	-10.47	$6.19E^{-6}$	137.30	-18.36	$1.62E^{-3}$
26.97	-20.41	$6.30E^{-6}$	65.52	-2.10	$1.67E^{-3}$
32.75	-20.63	$6.30E^{-6}$	75.90	-3.78	$1.67E^{-3}$
16.79	-2.70	$1.28E^{-5}$	74.49	-5.17	$1.67E^{-3}$
44.12	-20.38	$1.28E^{-5}$	89.06	-7.65	$1.67E^{-3}$
50.61	-29.41	$1.50E^{-5}$	95.23	-9.57	$1.67E^{-3}$
23.84	-10.42	$1.57E^{-5}$	104.89	-10.31	$1.67E^{-3}$
26.23	-9.11	$1.58E^{-5}$	126.15	-19.00	$1.67E^{-3}$
32.90	-5.17	$1.67E^{-5}$	174.40	-27.20	$1.67E^{-3}$
35.65	-9.54	$1.67E^{-5}$	196.19	-34.31	$1.67E^{-3}$
45.70	-19.00	$1.67E^{-5}$			
72.07	-34.02	$1.67E^{-5}$			
59.10	-27.17	$2.00E^{-5}$			

σ = contrainte en kilogrammes par centimètre carré
T = température en degrés Celsius
 $\dot{\epsilon}$ = taux de déformation en sec.⁻¹

Note: $\dot{\epsilon} = 1.5E^{-9} = 1.5 \times 10^{-9}$

TABLEAU III - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE COLUMNAIRE

	σ	T	$\dot{\epsilon}$
	3.89	-10.02	$1.77E^{-7}$
	4.50	-10.95	$1.77E^{-7}$
	6.41	-9.83	$4.05E^{-7}$
	6.76	-9.92	$4.05E^{-7}$
	11.53	-10.05	$2.03E^{-6}$
	12.23	-10.10	$2.03E^{-6}$
	12.19	-9.85	$2.04E^{-6}$
	17.69	-9.67	$6.09E^{-6}$
	18.89	-10.21	$6.09E^{-6}$
	20.60	-9.94	$6.25E^{-6}$
compression	29.13	-9.65	$2.03E^{-5}$
	30.55	-9.67	$2.03E^{-5}$
	37.74	-10.15	$2.11E^{-5}$
	42.97	-9.67	$6.70E^{-5}$
	48.76	-9.70	$6.70E^{-5}$
	54.67	-10.93	$7.01E^{-5}$
	56.50	-9.89	$1.52E^{-4}$
	59.65	-9.89	$2.53E^{-4}$
	51.99	-10.21	$2.81E^{-3}$
	3.50	-30.21	$1.62E^{-9}$
tension	3.50	-26.59	$2.92E^{-9}$
	7.29	-26.59	$3.80E^{-9}$
	5.18	-30.21	$5.94E^{-9}$
	3.50	-20.11	$7.00E^{-9}$
	5.18	-26.59	$8.17E^{-9}$
+	3.50	-16.44	$9.61E^{-9}$
	7.31	-30.21	$1.22E^{-8}$
	7.31	-26.59	$1.60E^{-8}$
	5.18	-20.11	$2.40E^{-8}$
	3.50	-6.94	$3.07E^{-8}$
	5.18	-16.44	$3.10E^{-8}$
	7.31	-20.11	$5.23E^{-8}$
	3.50	-2.76	$5.27E^{-8}$
	7.51	-19.84	$5.39E^{-8}$
	7.29	-19.84	$5.46E^{-8}$

TABLEAU III - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; GLACE COLUMNNAIRE
(suite)

σ	T	$\dot{\epsilon}$
7.31	-16.44	$6.20E^{-8}$
7.17	-19.84	$6.43E^{-8}$
5.18	-6.94	$1.06E^{-7}$
6.89	-9.59	$1.38E^{-7}$
5.18	-2.76	$2.44E^{-7}$
7.31	-6.94	$3.00E^{-7}$
8.23	-9.83	$9.08E^{-7}$
8.20	-9.38	$1.01E^{-6}$

σ = contrainte en kilogrammes par centimètre carré
 T = température en degrés Celsius
 $\dot{\epsilon}$ = taux de déformation en sec.⁻¹

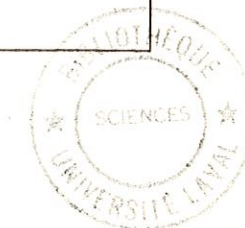
Note: $\dot{\epsilon} = 1.5E^{-9} = 1.5 \times 10^{-9}$

TABLEAU IV - DONNÉES EXPÉRIMENTALES; MONOCRISTAUX

σ	T	$\dot{\epsilon}$
2.47	-10.58	$1.32E^{-6}$
4.92	-20.36	$1.33E^{-6}$
12.11	-35.10	$1.33E^{-6}$
12.27	-21.45	$6.30E^{-6}$
27.34	-34.39	$6.30E^{-6}$
5.45	-10.29	$6.34E^{-6}$
19.43	-21.51	$1.50E^{-5}$
20.75	-21.51	$1.50E^{-5}$
36.38	-34.28	$1.50E^{-5}$
9.45	-10.50	$1.52E^{-5}$
36.82	-21.70	$5.60E^{-5}$
34.41	-21.70	$5.60E^{-5}$
68.03	-33.96	$5.60E^{-5}$
17.68	-10.26	$6.19E^{-5}$
54.98	-22.27	$1.32E^{-4}$
104.20	-34.11	$1.32E^{-4}$
30.69	-10.45	$1.40E^{-4}$
28.08	-10.37	$1.44E^{-4}$
49.05	-10.47	$5.25E^{-4}$
93.48	-22.41	$5.25E^{-4}$
149.03	-34.13	$5.25E^{-4}$
147.28	-34.22	$5.25E^{-4}$
77.92	-10.39	$1.24E^{-3}$
136.42	-22.52	$1.24E^{-3}$
194.98	-34.16	$1.24E^{-3}$
172.19	-34.31	$1.24E^{-3}$

σ = contrainte en kilogrammes par centimètre carré
 T = température en degrés Celsius
 $\dot{\epsilon}$ = taux de déformation en sec.⁻¹

Note: $\dot{\epsilon} = 1.5E^{-9} = 1.5 \times 10^{-9}$



seier entre les équations (1) et (2) pour représenter les résultats expérimentaux de la glace de neige.

Ramseier donne les valeurs des paramètres pour les équations qu'il utilise, mais ne dit pas d'où elles viennent et ne fait aucune analyse de régression. On peut donc améliorer sa propre représentation par une analyse de régression. Dans la première partie du tableau V, nous donnons le coefficient de détermination pour les résultats bruts de Ramseier et les résultats recalculés par la régression obtenue en utilisant la formule (1):

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D} = A_s \left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \quad (1)$$

Il faut remarquer que Ramseier a utilisé deux courbes différentes, une pour $\dot{\epsilon}/D < 10^5$ et l'autre $\dot{\epsilon}/D > 10^5$.

Avec la meilleure représentation, le coefficient de détermination pour la première courbe est de 0.87 et pour la deuxième de 0.96.

Dans la deuxième partie du tableau V, nous donnons la meilleure représentation en utilisant la formule:

$$\dot{\epsilon} = A e^{-\frac{Q}{RT}} \sigma^n \quad (2)$$

TABLEAU V - ANALYSES DE RÉGRESSION POUR LA GLACE DE NEIGE

FORMULE (1)			
$\dot{\epsilon}/D < 10^5$		$\dot{\epsilon}/D > 10^5$	
Ramseier:	$A_s = 4.712 \times 10^{15}$	$A_s = 1.297 \times 10^{23}$	
	$n = 3.118$	$n = 5.270$	
	$r^2 = 0.863$	$r^2 = .957$	
	$\delta = 0.206$	$\delta = 0.225$	
Analyse:	$A_s = 1.026 \times 10^{17}$	$A_s = 6.854 \times 10^{22}$	
	$n = 3.469$	$n = 5.179$	
	$r^2 = .872$	$r^2 = .957$	
	$\delta = 0.199$	$\delta = .224$	
FORMULE (2)			
Analyse:	$A = 1.7425 \times 10^6$	Analyse:	$A = 1\ 192$
	$Q = 20\ 000$		$Q = 19\ 080$
	$n = 3.370$		$n = 5.120$
Corrélation r:		Corrélation r:	
	multiple 0.969		multiple 0.978
	$\ln \dot{\epsilon}$ et $-1/T$ 0.924		$\ln \dot{\epsilon}$ et $-1/T$ 0.932
	$\ln \dot{\epsilon}$ et $\ln \sigma$ 0.911		$\ln \dot{\epsilon}$ et $\ln \sigma$ 0.977
	$\ln \sigma$ et $1/T$ 0.795		$\ln \sigma$ et $1/T$ 0.941

Il s'agit ici d'une relation entre trois variables que l'on peut ajuster en utilisant une régression multiple. Nous trouvons alors pour la première partie de la courbe ($\dot{\epsilon}/D < 10^5$) que l'énergie d'activation la plus représentative est de 20 000 cal mole⁻¹ et que le coefficient de détermination multiple est de 0.94 et le coefficient de détermination partiel de $\ln \dot{\epsilon}$ par rapport à $\ln \sigma$ est de 0.83. Cependant, l'étude montre que la variance expliquée par la régression multiple est supérieure à celle expliquée par la régression simple.

Pour la deuxième partie de la courbe, l'énergie d'activation est de 19 080 calorie mole⁻¹ et les deux coefficients de détermination sont égaux à 0.96, c'est-à-dire sensiblement égaux à 0.96 de la représentation de Ramseier.

Les mêmes calculs ont été répétés pour les glaces de frasil, colonnaire et monocristalline (tableaux VI, VII, VIII). Pour les glaces de frasil et colonnaire les corrélations avec l'équation (2) sont toujours meilleures que celles obtenues avec l'équation (1). Pour la glace monocristalline les résultats sont les mêmes. Cela se comprend, car le module de Young est alors indépendant de la température et les équations (1) et (2) se confondent.

TABLEAU VI - ANALYSES DE RÉGRESSION POUR LA GLACE DE FRASIL

FORMULE (1)			
$\dot{\epsilon}/D < 10^5$		$\dot{\epsilon}/D > 10^5$	
Ramseier:	$A_s = 1.03 \times 10^{15}$	$A_s = 8.66 \times 10^{21}$	
	$n = 3.00$	$n = 5.07$	
	$r^2 = 0.909$	$r^2 = 0.175$	
	$\delta = 0.212$	$\delta = 0.896$	
Analyse:	$A_s = 1.606 \times 10^{16}$	$A_s = 8.45 \times 10^{16}$	
	$n = 3.288$	$n = 3.23$	
	$r^2 = 0.927$	$r^2 = 0.790$	
	$\delta = 0.190$	$\delta = 0.452$	
FORMULE (2)			
Analyse:	$A = 4.2238 \times 10^7$	$A = 9.984 \times 10^4$	
	$Q = 21\ 227$	$Q = 18\ 499$	
	$n = 3.1184$	$n = 3.828$	
Corrélation r:		Corrélation r:	
	multiple 0.994	multiple 0.946	
	$\ln \dot{\epsilon}$ et $-1/T$ 0.952	$\ln \dot{\epsilon}$ et $-1/T$ 0.857	
	$\ln \dot{\epsilon}$ et $\ln \sigma$ 0.992	$\ln \dot{\epsilon}$ et $\ln \sigma$ 0.944	
	$\ln \sigma$ et $1/T$ 0.942	$\ln \sigma$ et $1/T$ 0.879	

TABLEAU VII - ANALYSES DE RÉGRESSION POUR LA GLACE
COLUMNAIRE

FORMULE (1) - TOUS LES POINTS			
Ramseier:	n	=	2.48
	r^2	=	0.59
Analyse :	A_s	=	7.239×10^{15}
	n	=	3.124
	r^2	=	0.939
	δ	=	0.324
FORMULE (2) - TOUS LES POINTS			
Analyse :	A	=	6.927×10^8
	Q	=	21 662
	n	=	3.097
Corrélation r:	multiple		0.979
	ln ξ et $-1/T$		0.854
	ln ξ et ln σ		0.964
	ln σ et $1/T$		0.773

TABLEAU VIII - ANALYSES DE RÉGRESSION POUR LA GLACE
MONOCRISTALLINE

FORMULE (1)			
$\xi/D < 10^{6.8}$		$\xi/D > 10^{6.8}$	
Ramseier:	$A_s = 25\ 902$	$A_s = 5\ 322$	
	n = 1.78	n = 2.3	
	$r^2 = 0.9867$	$r^2 = 0.967$	
	$\delta = 0.0616$	$\delta = 0.137$	
Analyse :	$A_s = 25\ 046$	$A_s = 1\ 937$	
	n = 1.78	n = 2.57	
	$r^2 = 0.9868$	$r^2 = 0.982$	
	$\delta = 0.0613$	$\delta = 0.100$	
FORMULE (2) - TOUS LES POINTS			
Analyse :	A = 5.257×10^4		
	Q = 14 091		
	n = 2.194		
Corrélation r:	multiple		0.9885
	ln ξ et $-1/T$		0.942
	ln ξ et ln σ		0.988
	ln σ et $1/T$		0.958

C) Représentation de tous les points d'essais pour un même type de glace

Au lieu de diviser les résultats expérimentaux en plusieurs zones pour un même type de glace, nous avons déterminé une seule loi pour représenter tous les résultats pour chaque type de glace. On trouve alors avec la représentation:

$$\dot{\epsilon} = A e^{\frac{-Q}{RT}} \sigma^n \quad (2)$$

a) Glacé de neige

Paramètres: A = 946.5

Q = 17 426

n = 4.357

Corrélations (r):

multiple: 0.98778

ln $\dot{\epsilon}$ et $-1/T$: 0.89318

ln $\dot{\epsilon}$ et ln σ : 0.98698

ln σ et $1/T$: 0.88629

δ_{123} : 0.2587 *

Cette représentation est meilleure que celle correspondant à chacune des deux parties utilisées par Ramseier. La représentation unique doit donc être choisie. La courbe théorique et les résultats expérimentaux sont montrés en figure 3.

* sur $\log_{10} \dot{\epsilon}$

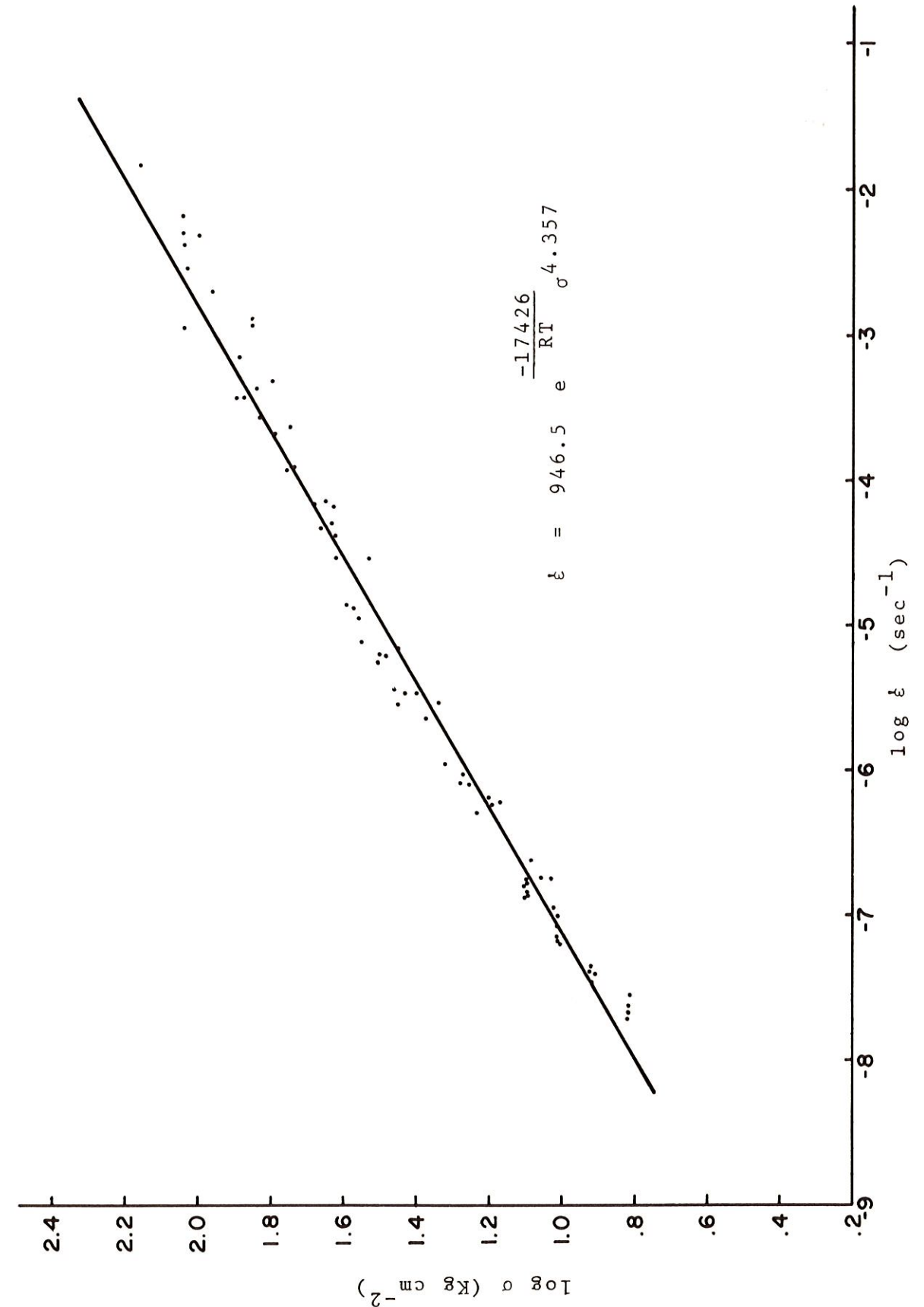


Fig. 3 - Représentation du fluage secondaire pour la GLACÉ DE NEIGE, T = -10°C

b) Glacé de frasil

Paramètres: A = 92 856

Q = 18 766

n = 3.9624

Corrélations (r):

multiple: 0.98719

ln $\dot{\epsilon}$ et $-1/T$: 0.85924ln $\dot{\epsilon}$ et ln σ : 0.98716ln σ et $1/T$: 0.87449 δ_{123} : 0.2914

On constate que cette représentation est excellente et aussi valable que la représentation des points en deux zones. La courbe théorique et les résultats expérimentaux sont montrés en figure 4.

c) Glacé colonnaireParamètres: A = 6.9269×10^8

Q = 21 662

n = 3.097

Corrélations (r):

multiple: 0.97897

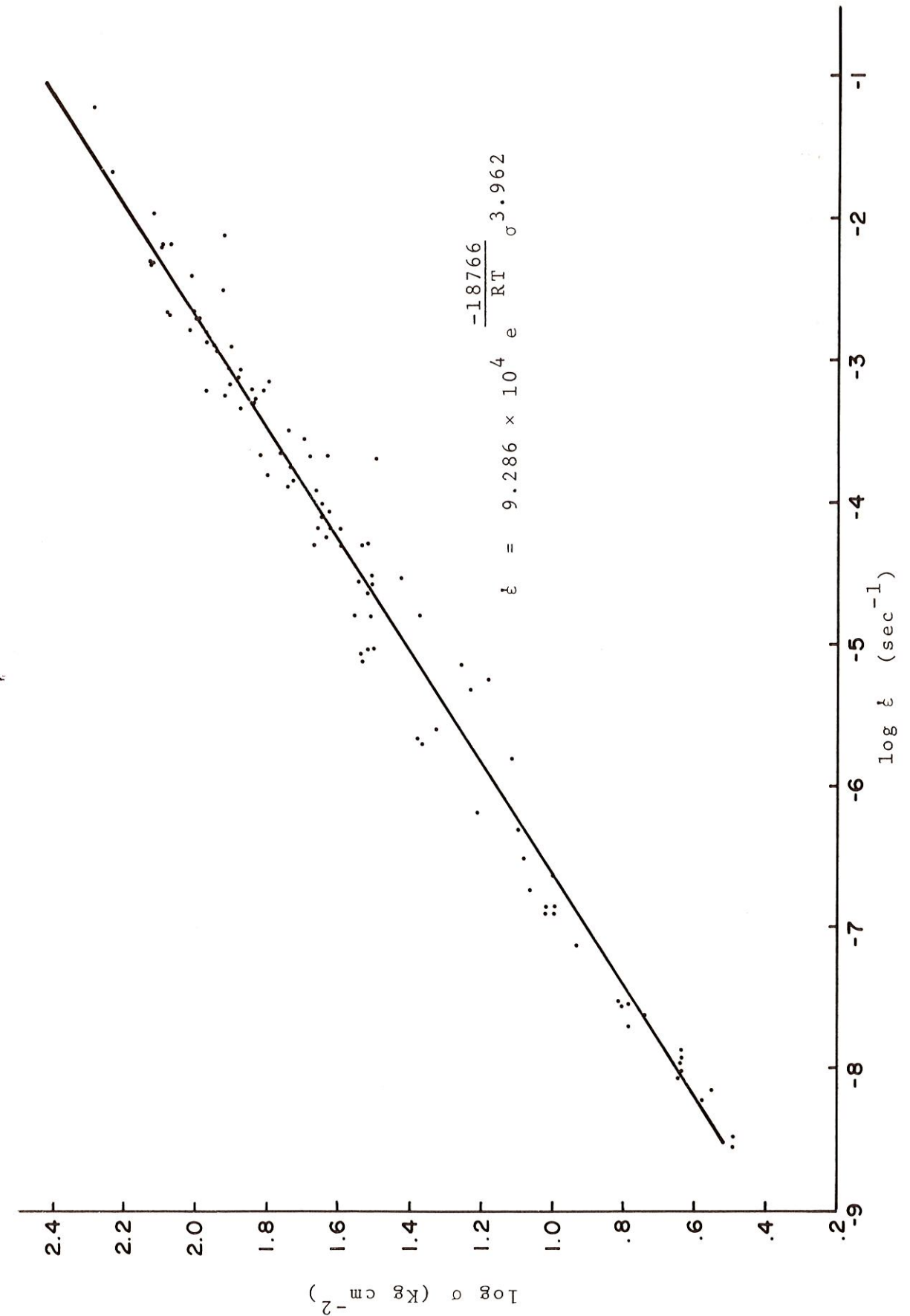
ln $\dot{\epsilon}$ et $-1/T$: 0.85395ln $\dot{\epsilon}$ et ln σ : 0.96382

Fig. 4 - Représentation du fluage secondaire pour la GLACE DE FRASIL, T = -10°C

$\ln \sigma$ et $1/T$: 0.77307

δ_{123} : 0.309

On peut représenter tous les points par une seule courbe, montrée en figure 5.

d) Monocristaux

Paramètres: A = 52 574

Q = 14 091

n = 2.1941

Corrélations (r):

multiple: 0.9885

$\ln \dot{\epsilon}$ et $-1/T$: 0.94229

$\ln \dot{\epsilon}$ et $\ln \sigma$: 0.98837

$\ln \sigma$ et $1/T$: 0.95807

δ_{123} : 0.1438

On retrouve sensiblement l'énergie d'activation pour la diffusion interne. La corrélation est excellente et elle est montrée en figure 6.

D) Représentation en sinus hyperbolique

Ramseier propose la représentation empirique suivante pour les résultats globaux pour chaque type de glace:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D} = A[\sinh(B\sigma/E)]^n \quad (23)$$

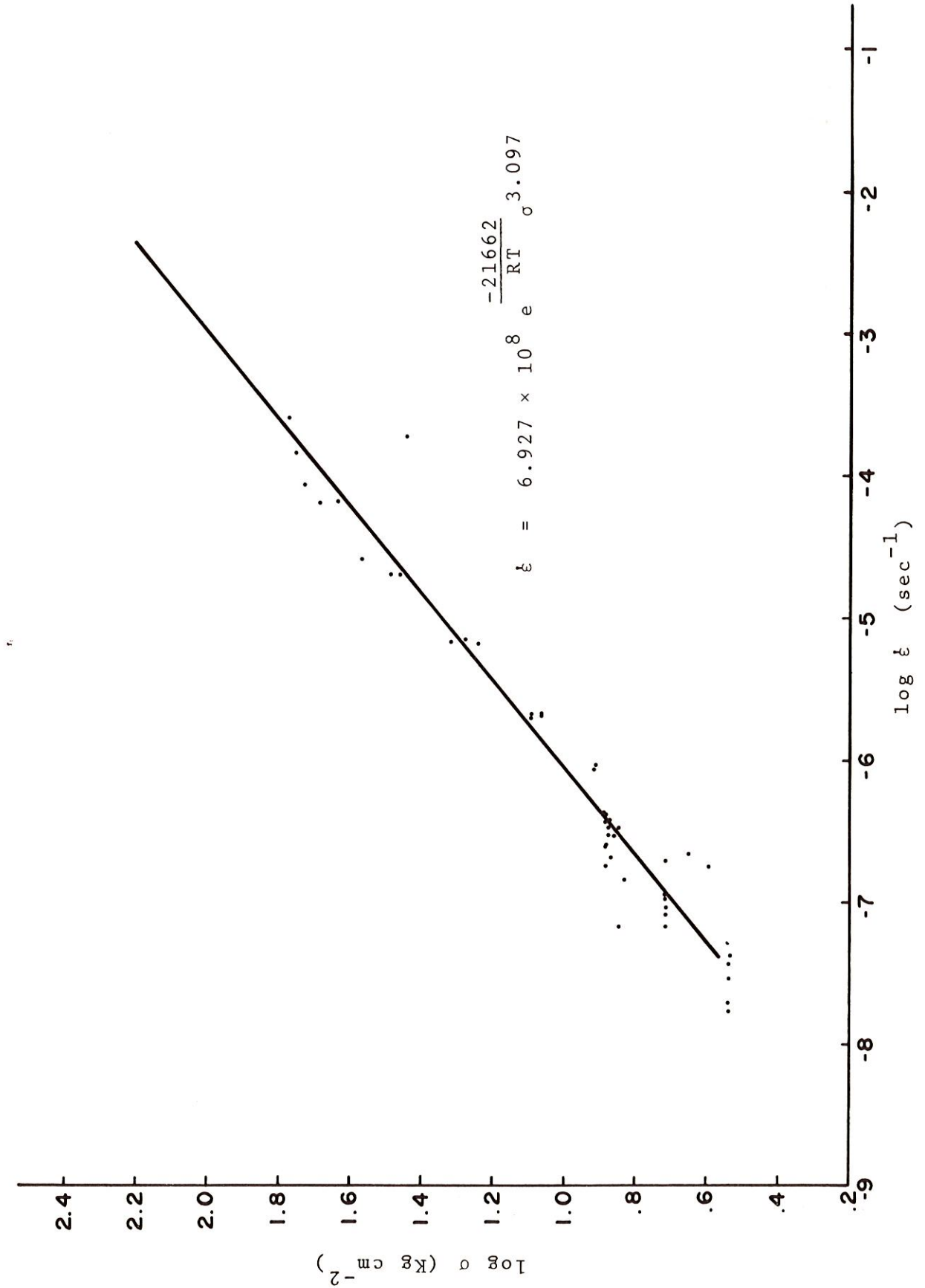


Fig. 5 - Représentation du fluage secondaire pour la GLACE COLUMNAIRE, T = -10°C

TABLEAU IX - COMPARAISON DE LA REPRÉSENTATION EN SINUS HYPERBOLIQUE AVEC LA REPRÉSENTATION EN FONCTION PUISSANCE. L'ÉCART-TYPE δ EST CALCULÉ PAR L'ÉQUATION (17)

TYPES DE GLACE		FONCTION SIN.HYPB.	FONCTION PUISSANCE
Glace de neige	r	0.975	0.974
	δ	0.255	0.259
Glace de frasil	r	0.880	0.977
	δ	0.652	0.291
Glace colonnaire	r	0.930	0.938
	δ	0.350	0.309
Monocristaux	r	0.997	0.983
	δ	0.062	0.144

avec:

$$\begin{cases} y &= \frac{t}{D} \\ x &= \frac{\sigma}{\sigma_0} \\ D &= D_0 e^{-\frac{Q}{RT}} \end{cases} \quad (24)$$

Une première méthode a été utilisée où tous les résultats expérimentaux pour la glace polycristalline seulement (sans les monocristaux) sont introduits dans l'analyse de régression multiple. La valeur de D_0 dans ce calcul a été prise égale à $12 \text{ cm}^2/\text{sec}$ et $\sigma_0 = 1.0$.

On trouve alors les résultats suivants pour les 223 points d'essais:

$$\begin{aligned} \text{Paramètres: } A &= 9.696 \times 10^4 \\ Q &= 18\,429 \\ n &= 3.735 \\ \sigma_0 &= 1.0 \end{aligned}$$

Corrélations (r):

$$\text{multiple: } 0.968$$

$$\delta_{123}: 0.438$$

Cette première interprétation est montrée en figure 7. Elle n'est pas parfaite, mais elle peut être utile si

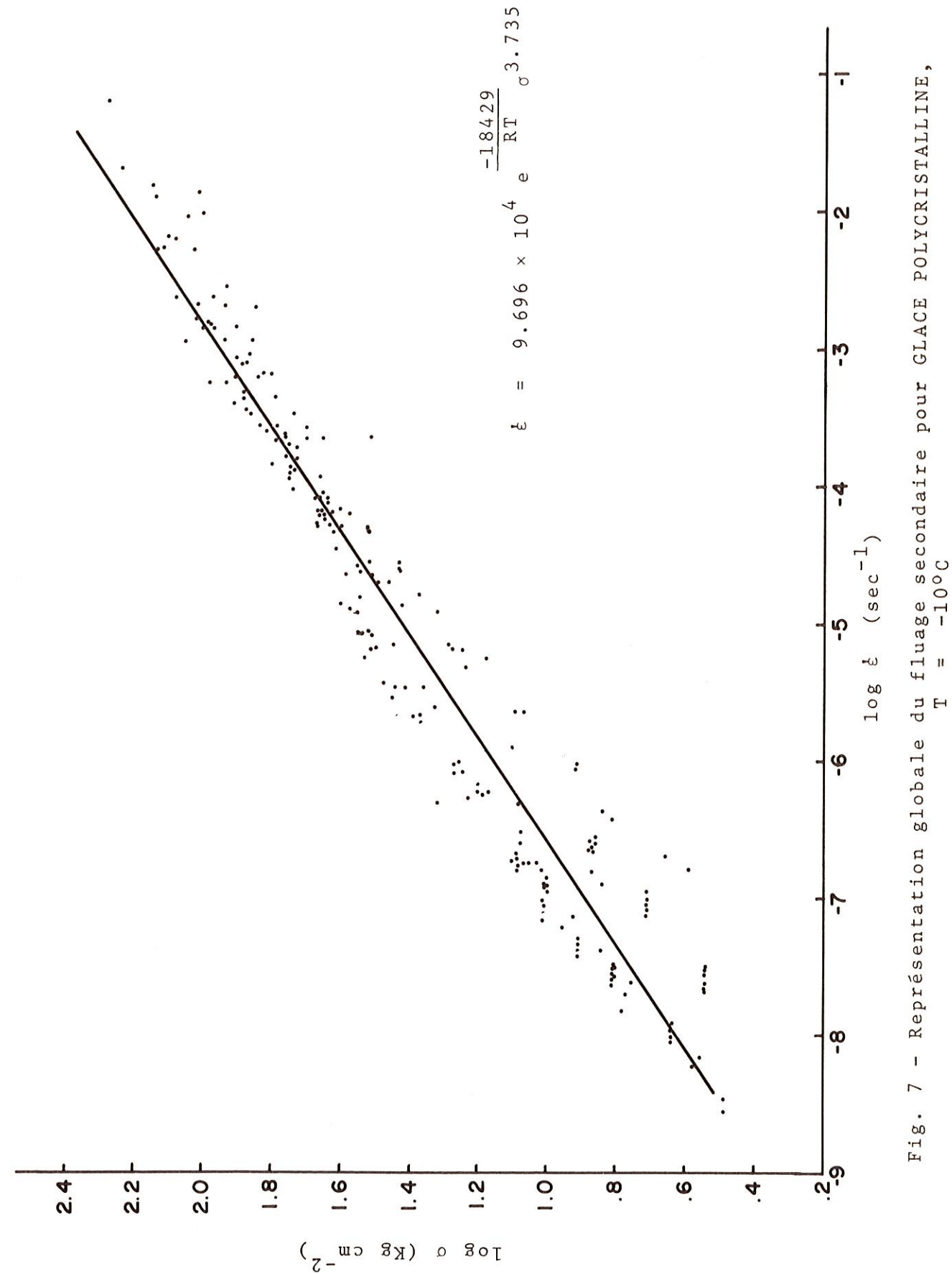


Fig. 7 - Représentation globale du fluage secondaire pour GLACE POLYCRISTALLINE,

on veut analyser le comportement global de la glace de rivière et de lac, sans en connaître la composition.

On peut améliorer considérablement cette représentation globale en prenant les meilleures valeurs de Q et de σ_0 pour chaque type de glace. Le calcul a été effectué de la façon suivante:

1 - On considère tous les points expérimentaux (c'est-à-dire 249 points) et on fait la corrélation entre $\ln \dot{\epsilon}/D$ et $\ln \sigma$, ce qui revient à considérer $\sigma_0 = 1$ pour les quatre types de glace, mais avec des Q variables. On a trouvé:

$$\begin{aligned} A &= 386\,957 \\ n &= 2.5235 \\ r &= 0.5794 \\ \delta &= 1.68 \end{aligned}$$

2 - On considère ensuite séparément chaque type de glace et on calcule des σ_0 qui minimisent les moindres carrés pour les paramètres A et n déjà trouvés en 1.

3 - On répète la procédure ayant trouvé les σ_0 et on utilise à la place les valeurs de $x = \sigma/\sigma_0$.

Après cinq cycles de calcul, nous avons trouvé les

valeurs suivantes:

<u>Valeur des paramètres globaux</u>		
A	=	10478.7
n	=	3.6689
r	=	0.9798
δ	=	0.41026

<u>Caractéristiques de chaque glace</u>		
	Q	σ_0
neige	17426	2.085
frasil	18766	0.8267
columnaire	21661	0.1352
monocristaux	14091	5.328

La figure 8 présente ces résultats globaux. On se rend compte que cette représentation universelle est excellente et que tous les points du fluage secondaire peuvent être représentés par une seule équation. Le rôle de σ_0 est de répartir les quatre types de glace.

IV - CONCLUSIONS

Dans cette analyse statistique de résultats expérimentaux sur le fluage secondaire de la glace de rivière et de lac, nous trouvons que la représentation classique par une fonction de puissance des contraintes, combinée avec

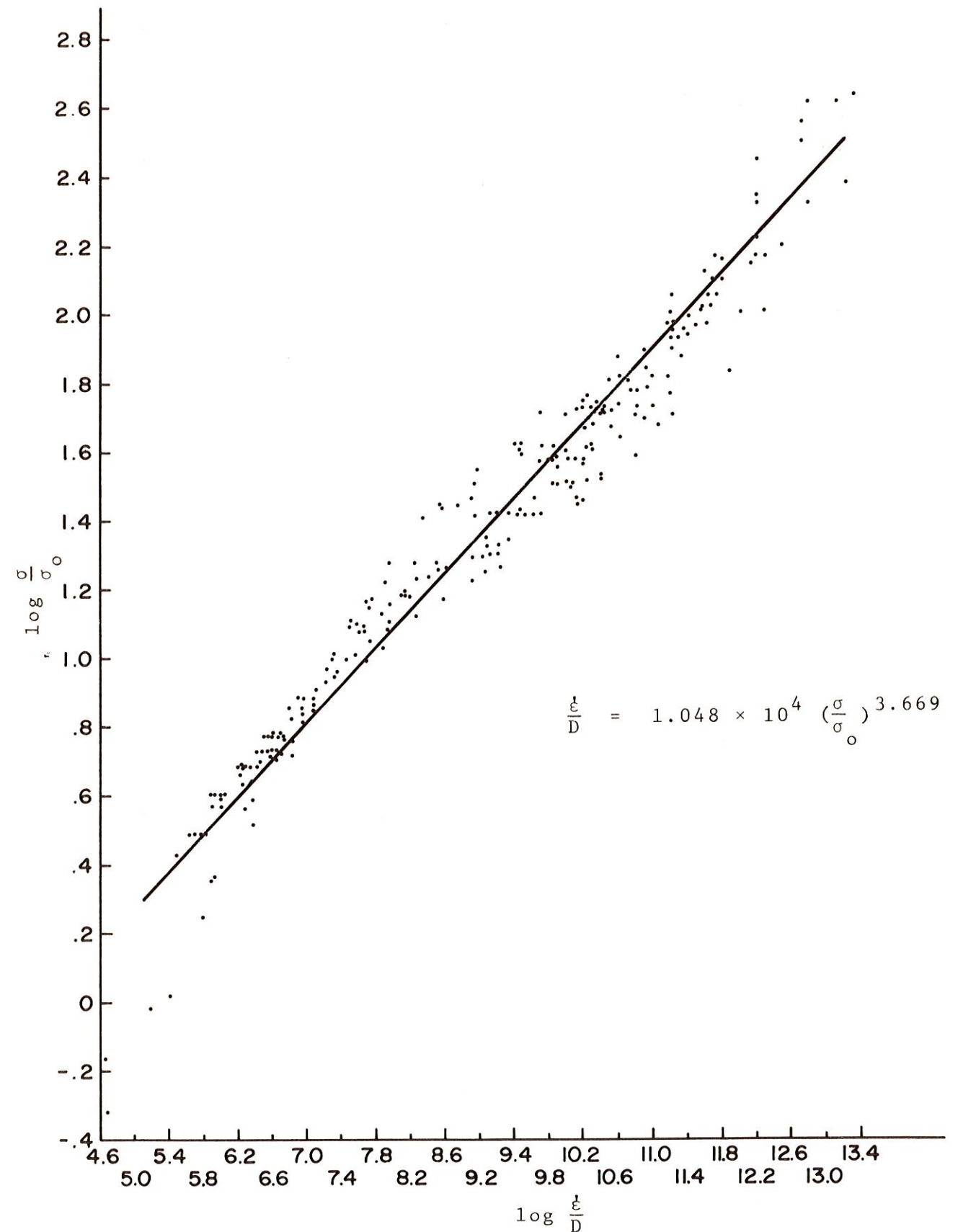


Fig. 8 - Représentation universelle du fluage secondaire de la glace de rivière et de lac

l'équation d'Arrhénus, est la meilleure.

Cela donne un coefficient de puissance variant de 2.2 pour des monocristaux à 4.35 pour la glace de neige et couvre une large gamme des contraintes en traction et en compression pouvant s'étendre sur la presque totalité du domaine du comportement ductile de la glace.

Il est aussi possible de faire une excellente représentation de tous les résultats expérimentaux par une seule loi de puissance où l'exposant est de 3.67. Chaque type de glace se distingue dans cette représentation par la valeur de sa propre énergie d'activation et par une constante.

Les énergies d'activation varient à partir d'une valeur voisine de celle de l'énergie d'activation pour la diffusion interne dans le cas de la glace monocristalline à une valeur maximale de 21 600 calories mole⁻¹ pour la glace colonnaire.

RÉFÉRENCES

- [1] BROWNLEE, K.A., 1960. *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*. John Wiley and Sons Inc., 570 pages.
- [2] GLEN, J.W., 1955. *The Creep of Polycrystalline Ice*. Proc. R. Soc. A 228, pp. 519-538.

- [3] MICHEL, B. and R. RAMSEIER, 1971. *Classification of River and Lake Ice*. Can. Geotechnical J. 8, pp. 36-45.
- [4] RAMSEIER, R., 1975. *Growth and Mechanical Properties of River and Lake Ice*. D. Sc. Thesis presented at Université Laval.